Метод Л.С.Гольдфарба

Нелинейная динамическая система **задана** следующей структурной схемой (представлена на рисунке 1).

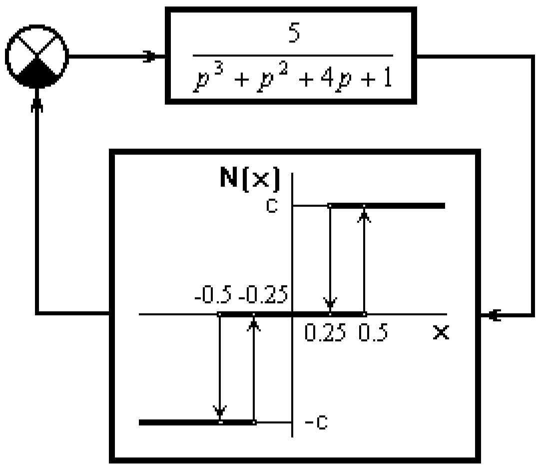


Рисунок 1 – Структура заданной динамической системы

Необходимо **исследовать** систему на предмет определения ее динамического поведения.

Линейная часть системы с передаточной функцией

$$W_{лч}(p) = \frac{5}{p^3 + p^2 + 4p + 1} \qquad (1)$$

является устойчивой, что подтверждается условием И.А.Вышнеградского: $1 \cdot 4 > 1 \cdot 1$. Это же подтверждается значениями корней характеристического полинома линейной части системы

$$p_{1,2} = -0.369 \pm j1.916\ c^{-1},\ p_3 = -0.263\ c^{-1}.$$

Частотная передаточная функция линейной части системы может быть получена при подстановке в (1) $p = i\omega$:

$$W_{лч}(i\omega) = \mathrm{Re}_{лч}(\omega) + i\,\mathrm{Im}_{лч}(\omega), \qquad (2)$$

где $\mathrm{Re}_{лч}(\omega) = \dfrac{5(1-\omega^2)}{(1-\omega^2)^2 + \omega^2(4-\omega^2)^2}$, $\mathrm{Im}_{лч}(\omega) = -\dfrac{5\omega(4-\omega^2)}{(1-\omega^2)^2 + \omega^2(4-\omega^2)^2}$.

Изменяя в (2) частоту ω в диапазоне $0 \le \omega < \infty$, получим амплитудно-частотную характеристику (АЧХ) линейной части системы, график которой в логарифмическом масштабе $20Lg[A(\omega)],\ Lg(\omega)$ представлен на рисунке 2.

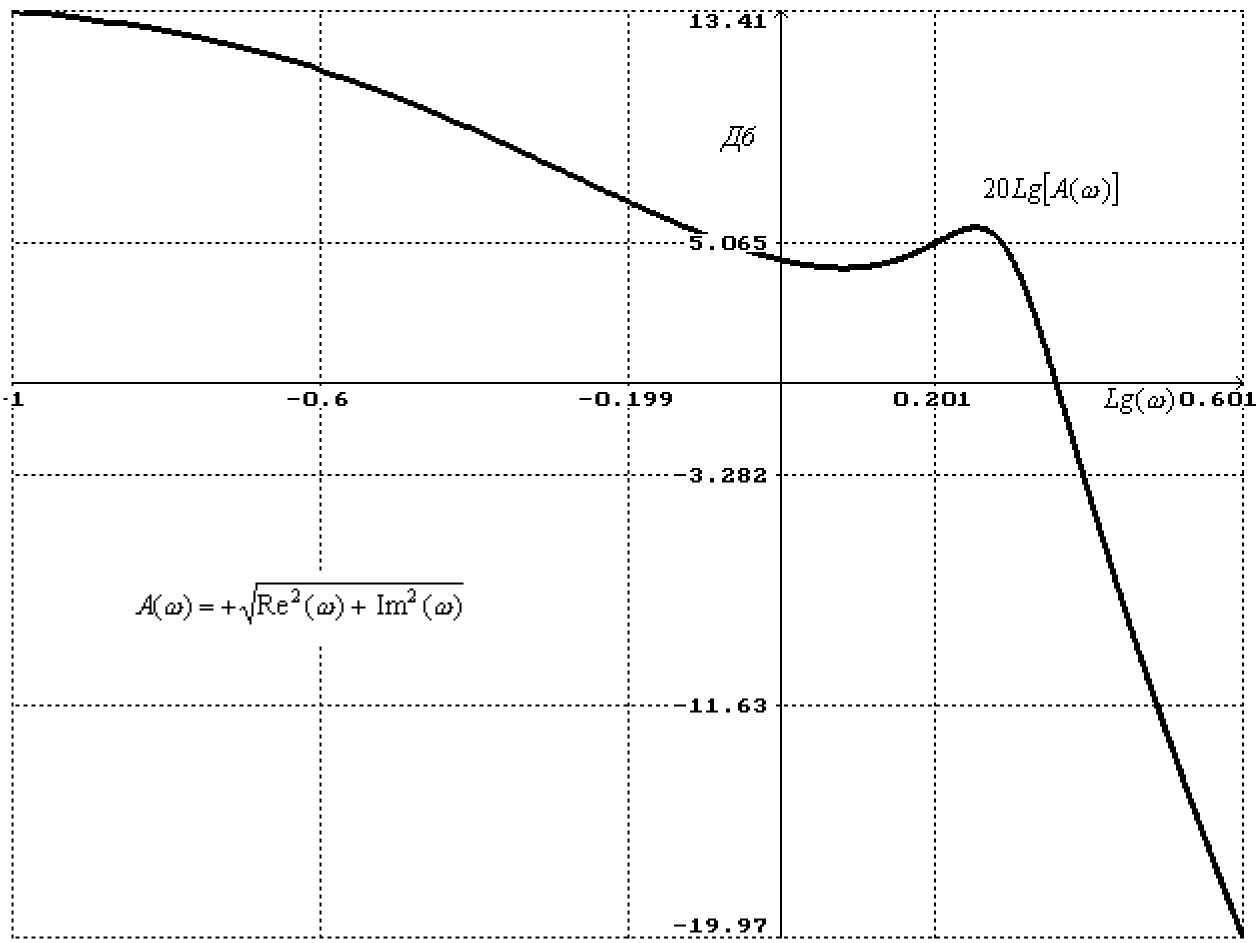


Рисунок 2 – Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика (ЛАФЧХ) линейной части системы

Из ЛАФЧХ заключаем, что при заданных параметрах линейная часть системы (1) в достаточной степени обладает свойством фильтра низких частот (ФНЧ) – характеристика пересекает ось с наклоном $> -60\ Дб/дек$.

Отсюда заключаем, что для исследования системы можно применять методы гармонической линеаризации. Для исследования выбираем графо-аналитический метод Л.С.Гольдфарба.

Нелинейная часть системы представляет собой типовую нелинейность «Трехпозиционное реле с гистерезисом», имеющую широкое применение в технических системах автоматики.

Для линеаризации заданной нелинейности определим коэффициенты гармонической линеаризации $q(X_m)$, $q'(X_m)$.

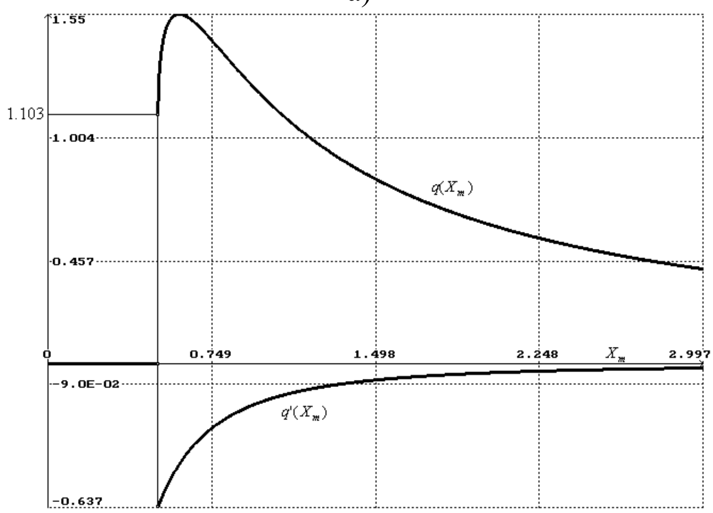
$$q(X_m)=\begin{cases}0,\ если\ \ X_m<0.5;\\ \dfrac{2c}{\pi X_m}\left(\sqrt{1-\dfrac{0.0625}{X_m^2}}+\sqrt{1-\dfrac{0.25}{X_m^2}}\right),\ если\ \ X_m\ge 0.5.\end{cases} \qquad (3)$$

$$
q'(X_m) = \begin{cases} 0, \ \text{если} \ X_m < 0.5; \\ -\dfrac{2c}{\pi X_m^2}(0.5 - 0.25), \ \text{если} \ X_m \geq 0.5. \end{cases} \qquad (4)
$$

Где X_m - амплитуда первой гармоники $x(t) = X_m Sin(\omega t)$ на входе нелинейности (см.рис. 1).

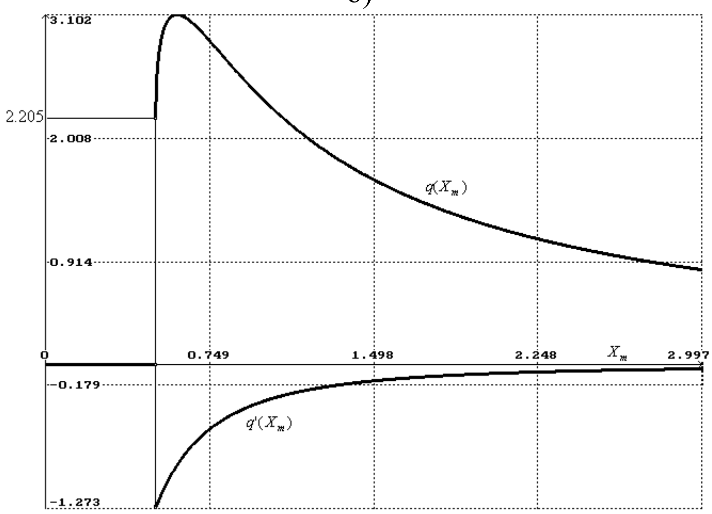
Графики коэффициентов гармонической линеаризации при $c = 1$ и $c = 2$ представлены соответственно на рисунках 3-а и 3-б.

а)



При $c = 1$

б)



При $c = 2$

Рисунок 3 – Графики коэффициентов гармонической линеаризации для заданной нелинейности

Для построения годографа Гольдфарба необходимо определить частотную передаточную функцию гармонически линеаризованной нелинейности.

Передаточная функция гармонически линеаризованной нелинейности имеет следующий вид

$$W_{\text{нч}}(p) = q(X_{\text{m}}) + \frac{q'(X_{\text{m}})}{\omega} p\,. \tag{5}$$

Частотная передаточная функция нелинейной части системы может быть получена с помощью подстановки в (5) $p = i\omega$:

$$W_{\text{нч}}(i\omega) = q(X_{\text{m}}) + iq'(X_m)\,.$$

Для исследования системы необходимо построить годограф Гольдфарба

$$-\frac{1}{W_{нч}(i\omega)} = \operatorname{Re}_{нч}(X_m) + i\operatorname{Im}_{нч}(X_m)\,, \tag{6}$$

где $\operatorname{Re}_{нч}(X_m) = -\dfrac{q(X_m)}{q^2(X_m) + q'^2(X_m)}$, $\operatorname{Im}_{нч}(X_m) = \dfrac{q'(X_m)}{q^2(X_m) + q'^2(X_m)}$,

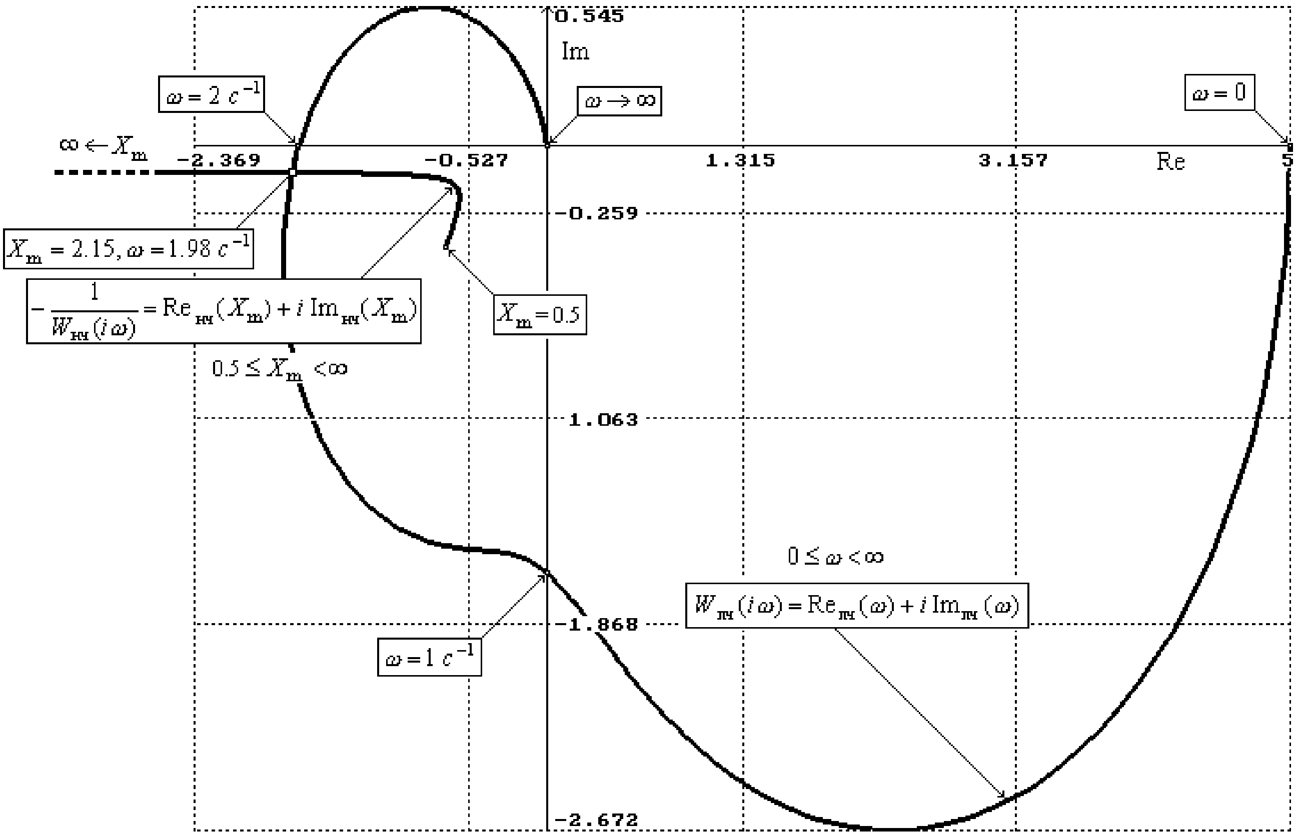
$0.5 \le X_m < \infty$.

Построив годографы (2) и (6) в одной системе координат (представлено на рисунках 4-а и 4-б) получим единственное их пересечение, что свидетельствует о существовании в системе периодического решения (движения).

Характер пересечения свидетельствует об устойчивости периодического движения. Отсюда заключаем, что исследуемая система является автоколебательной системой «мягкого» режима возбуждения автоколебаний.

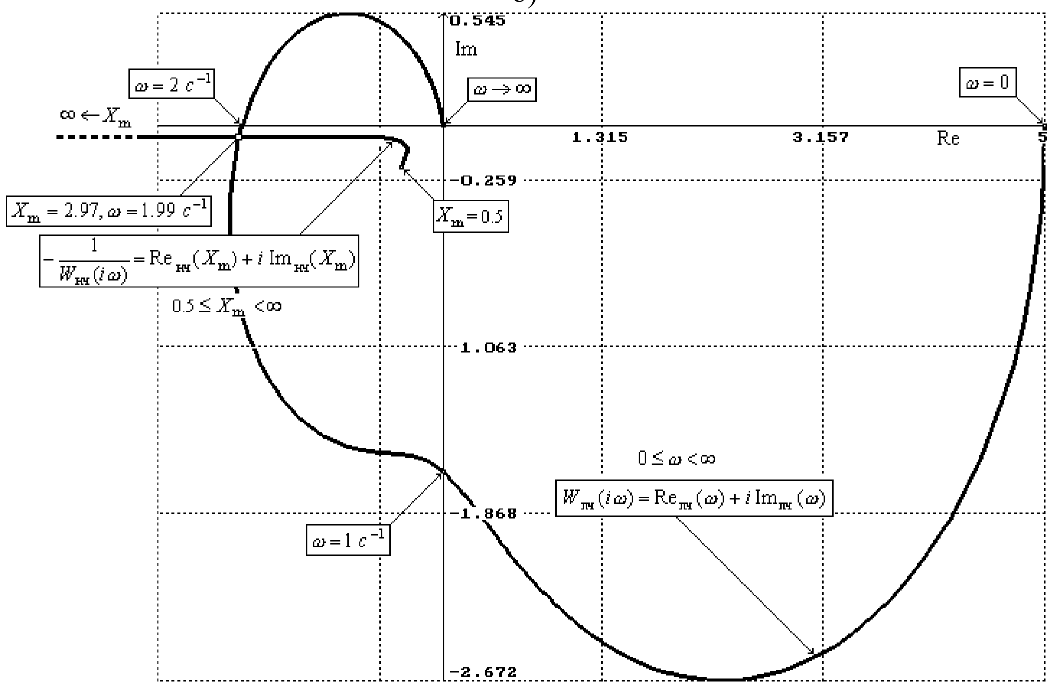
При $c = 1$ частота и амплитуда автоколебаний соответствует $\omega = 1.98\ c^{-1}$, $X_{\text{m}} = 2.15$, при $c = 2$ частота и амплитуда автоколебаний соответствует $\omega = 1.99\ c^{-1}$, $X_{\text{m}} = 2.97$ (см. рис.4).

а)



Годограф Гольдфарба при $c = 1$

б)



Годограф Гольдфарба при $c = 2$

Рисунок 4 – Годограф Гольдфарба