«ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ»
(часть 2. лекция 6)
Понятие устойчивости.
Работа А.М.Ляпунова «Общая задача об устойчивости движения»

(проф.В.Н.Шамберов)

Основы современной теории устойчивости были заложены великим русским математиком и механиком Александром Михайловичем Ляпуновым (1857 - 1918) в его знаменитой докторской диссертации «Общая задача об устойчивости движения», впервые опубликованной в 1892 году. До сих пор идеи этой работы питают математиков и позволяют получать ценные новые результаты в области теории устойчивости.

6.1 Понятие устойчивости в формулировке А.М.Ляпунова

Максвелл, Вышнеградский и Стодола не дали точного определения устойчивости. Под устойчивостью систем автоматического регулирования (машина-двигатель + регулятор) в практическом смысле понималось следующее: 1) при отсутствии заметного внешнего воздействия (нагрузка на машину заметно не изменяется) регулируемая величина (частота вращения) либо не изменяется, либо изменяется незначительно, оставаясь при этом в некоторых допустимых пределах; 2) при применении к системе внешнего воздействия (изменение нагрузки) регулируемая величина через некоторое время принимает новое (в случае статического регулятора) значение и в дальнейшем не изменяет своего значения, либо изменяет незначительно, оставаясь в допустимых пределах (в случае применения астатического регулятора регулируемая величина должна вернуться к прежнему значению); 3) при снятии внешнего воздействия (возвращения к прежней нагрузке) регулируемая величина принимает прежнее значение.

Под неустойчивостью (опять же в практическом смысле) понималось: при отсутствии заметного внешнего воздействия регулируемая величина самопроизвольно изменяется, достигая недопустимых для эксплуатации значений.

Всему этому требовалось дать строгое определение, что и было сделано Ляпуновым.

Рассмотрим автономную (отсутствуют внешние возмущающие воздействия, но существуют ненулевые начальные возмущения – начальные отклонения переменных состояния от равновесия), динамическую систему

$$\begin{aligned}
&\dot{x}_1(t) = X_1(x_1(t),\, x_2(t),\, x_3(t),\, \ldots,\, x_n(t));\\
&\dot{x}_2(t) = X_2(x_1(t),\, x_2(t),\, x_3(t),\, \ldots,\, x_n(t));\\
&\dot{x}_3(t) = X_3(x_1(t),\, x_2(t),\, x_3(t),\, \ldots,\, x_n(t));\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;\\
&\dot{x}_n(t) = X_n(x_1(t),\, x_2(t),\, x_3(t),\, \ldots,\, x_n(t)).
\end{aligned} \tag{6.1}$$

Уравнения (6.1) описывают возмущенные движения системы (в отличие от представленных моделей Максвелла, Вышнеградского и Стодолы данная модель предполагается нелинейной).

Однако у системы есть невозмущенное движение (состояние равновесия), которое математически записывается в следующем виде

$$x_1(t) = 0,\;\; x_2(t) = 0,\;\; x_3(t) = 0,\;\; \ldots,\;\; x_n(t) = 0\,. \tag{6.2}$$

Состояние равновесия может быть устойчивым или неустойчивым. Ляпунов дает следующее строгое (научное) понятие устойчивости (неустойчивости) состояния равновесия (6.2) динамической системы (6.1):

1) невозмущенное движение (состояние равновесия) называется устойчивым (по Ляпунову) относительно переменных $x_1(t),\; x_2(t),\; x_3(t),\; \ldots,\; x_n(t)$, если для любого заданного положительного числа ε, как бы мало оно ни было, можно подобрать другое положительное число δ, зависящее от ε, такое, чтобы при возмущениях, удовлетворяющих неравенствам

$$|x_{10}(t_0)| < \delta,\;\; |x_{20}(t_0)| < \delta,\;\; |x_{30}(t_0)| < \delta,\;\; \ldots,\; |x_{n0}(t_0)| < \delta \tag{6.3}$$

соответствующее этим возмущениям решение (движение) $x_1(t),\ x_2(t),\ x_3(t),\ \ldots,\ x_n(t)$ для любого $t \geq t_0$ удовлетворяло бы неравенствам

$$\left|x_1(t\ )\right| < \varepsilon,\ \left|x_2(t\ )\right| < \varepsilon,\ \left|x_3(t\ )\right| < \varepsilon,\ \ldots,\left|x_n(t\ )\right| < \varepsilon\,; \tag{6.4}$$

2) если же упомянутое число δ подобрать невозможно, то состояние равновесия (6.2) неустойчиво;

3) если можно подобрать упомянутое число δ такое, чтобы из условий (6.3) при выполнении (6.4) дополнительно выполнялись бы условия

$$\lim_{t\to\infty} x_1(t) = 0,\ \lim_{t\to\infty} x_2(t) = 0, \lim_{t\to\infty} x_3(t) = 0, \ldots, \lim_{t\to\infty} x_n(t) = 0\ , \tag{6.5}$$

то невозмущенное движение называется асимптотически устойчивым.

Примечание. Фразу: «…положительное число δ, зависящее от ε…» следует понимать, как то, что положительное число δ всегда меньше положительного числа ε как бы мало оно (число ε) ни было.

6.2 Геометрическая интерпретация устойчивости по Ляпунову

Геометрическую интерпретацию устойчивости по Ляпунову удобно продемонстрировать на динамической системе второго порядка

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = X_1(x_1(t),\ x_2(t)); \\ \dot{x}_2(t) = X_2(x_1(t),\ x_2(t)). \end{cases} \tag{6.6}$$

Представим, что операторы $X_1(x_1, x_2),\ X_2(x_1, x_2)$ имеют следующий вид

$$\begin{aligned} X_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2; \\ X_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}\,x_2. \end{aligned} \tag{6.7}$$

Характеристическое уравнение (6.6) с учетом (6.7) будет следующим

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0. \qquad (6.8)$$

Пусть $a_{11} + a_{22} < 0$, $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{22} > 0$ и $(a_{11} + a_{22})^2 < 4(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{22})$, тогда корни уравнения (7.8) будут комплексно-сопряженными с отрицательной вещественной частью, т.е. $\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta$, где $\alpha < 0$ (β всегда положительно). Движения (фазовые траектории), характерные для таких корней представлены на рисунке 6.1. Выполняются условия Ляпунова (6.4) и (6.5) - все фазовые траектории сходятся к состоянию равновесия. Такое состояние равновесия называется «устойчивый фокус» (асимптотически устойчивое состояние равновесия).

Примечание. Названия состояниям равновесия для динамических систем второго порядка дал А.Пуанкаре. В настоящее время существует классификация состояний равновесия (особых точек) вплоть до систем четвертого порядка.

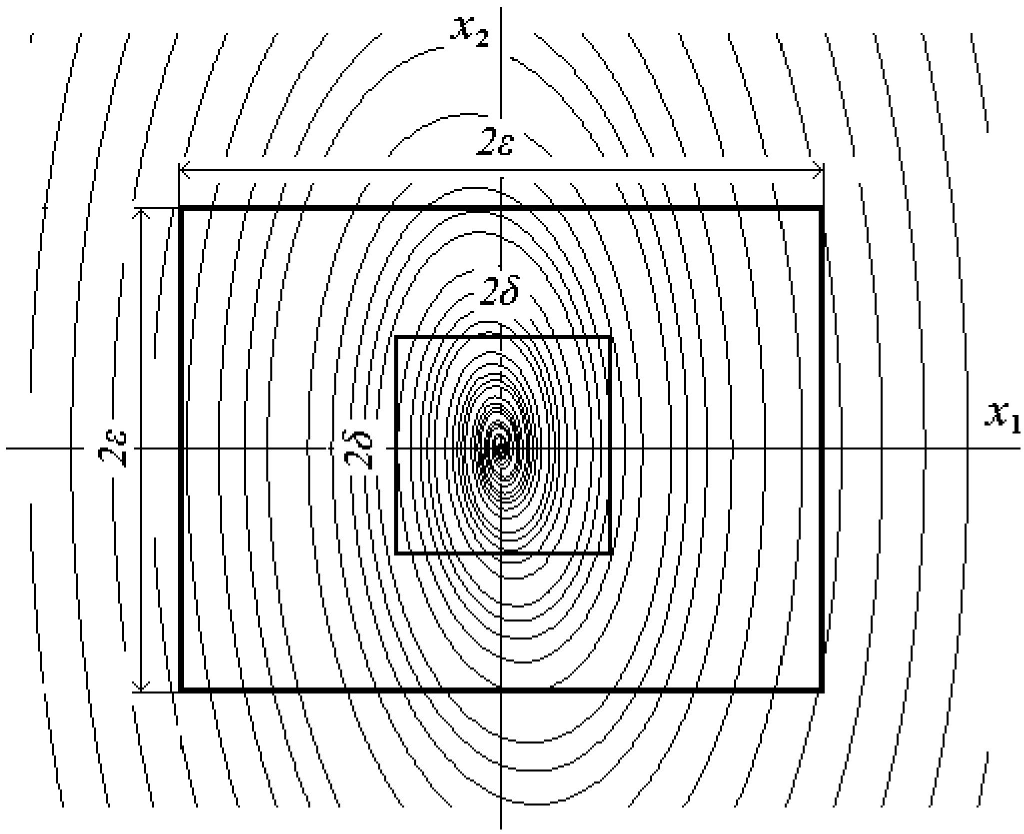

Рисунок 6.1 - Состояние равновесия типа «устойчивый фокус»

Пусть $a_{11}+a_{22}>0$, $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{22}>0$ и $(a_{11}+a_{22})^2<4(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{22})$, тогда корни уравнения (6.8) будут комплексно-сопряженными с положительной вещественной частью, т.е. $\lambda_{1,2}=\alpha\pm j\beta$, где $\alpha>0$. Движения (фазовые траектории), характерные для таких корней представлены на рисунке 6.2. Не выполняется условие Ляпунова (6.4) - все фазовые траектории направлены от состояния равновесия. Такое состояние равновесия называется «неустойчивый фокус» (неустойчивое состояние равновесия).

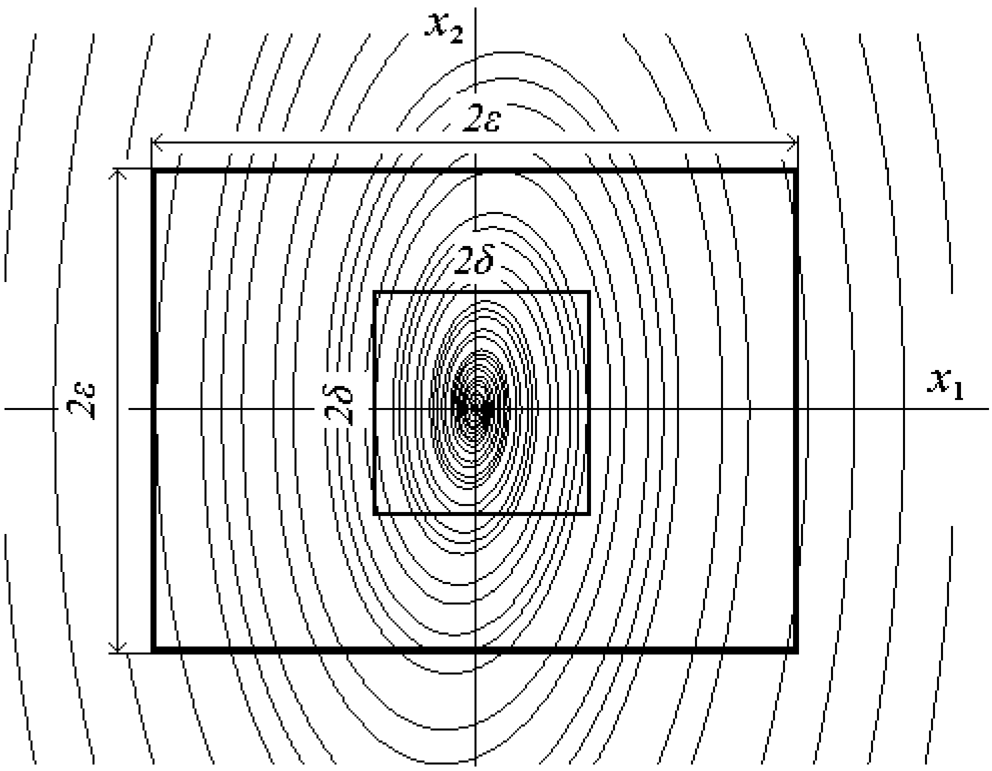

Рисунок 6.2 - Состояние равновесия типа «неустойчивый фокус»

Пусть $a_{11}+a_{22}<0$, $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{22}>0$ и $(a_{11}+a_{22})^2>4(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{22})$, тогда корни уравнения (7.8) будут вещественными отрицательными, т.е. $\lambda_1<0$, $\lambda_2<0$. Фазовые траектории, характерные для таких корней представлены на рисунке 6.3. Выполняются условия Ляпунова (6.4) и (6.5) - все фазовые траектории сходятся к состоянию равновесия. Такое состояние равновесия называется «устойчивый узел» (асимптотически устойчивое состояние равновесия).

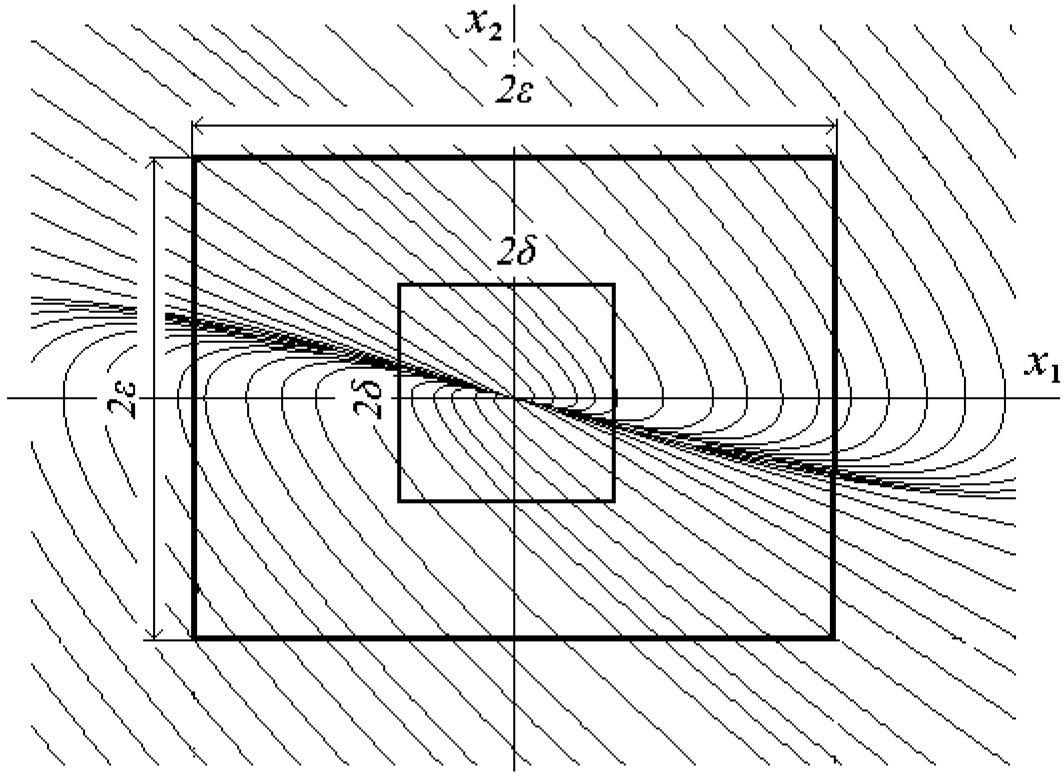

Рисунок 6.3 - Состояние равновесия типа «устойчивый узел»

Пусть $a_{11}+a_{22}>0$, $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{22}>0$ и $(a_{11}+a_{22})^2>4(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{22})$, тогда корни уравнения (6.8) будут вещественными положительными, т.е. $\lambda_1>0$, $\lambda_2>0$. Фазовые траектории, характерные для таких корней, представлены на рисунке 6.4. Не выполняется условие Ляпунова (6.4) - все фазовые траектории направлены от состояния равновесия. Такое состояние равновесия называется «неустойчивый узел» (неустойчивое состояние равновесия).

Пусть $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{22}<0$, тогда корни уравнения (6.8) будут вещественными разными (один – положительный, другой – отрицательный), т.е. $\lambda_1<0$, $\lambda_2>0$. Фазовые траектории, характерные для таких корней, представлены на рисунке 6.5. Не выполняется условие Ляпунова (6.4) - все фазовые траектории в конечном итоге направлены от состояния равновесия. Такое состояние равновесия имеет название «седло» (неустойчивое состояние равновесия).

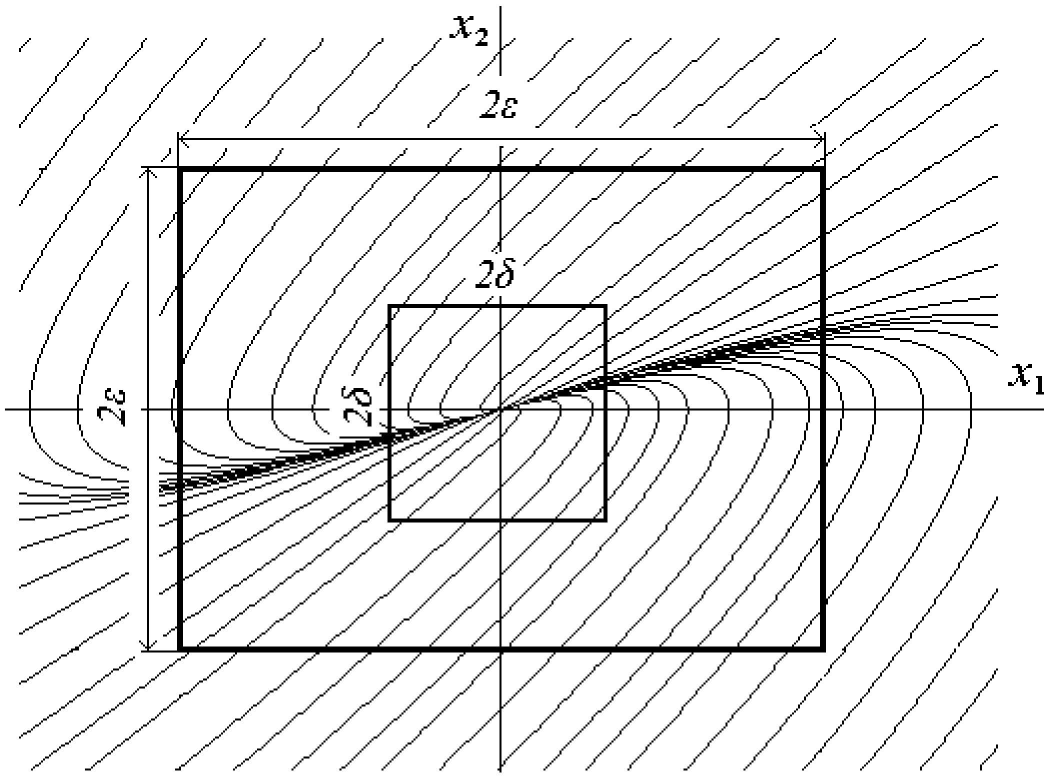

Рисунок 6.4 - Состояние равновесия типа «неустойчивый узел»

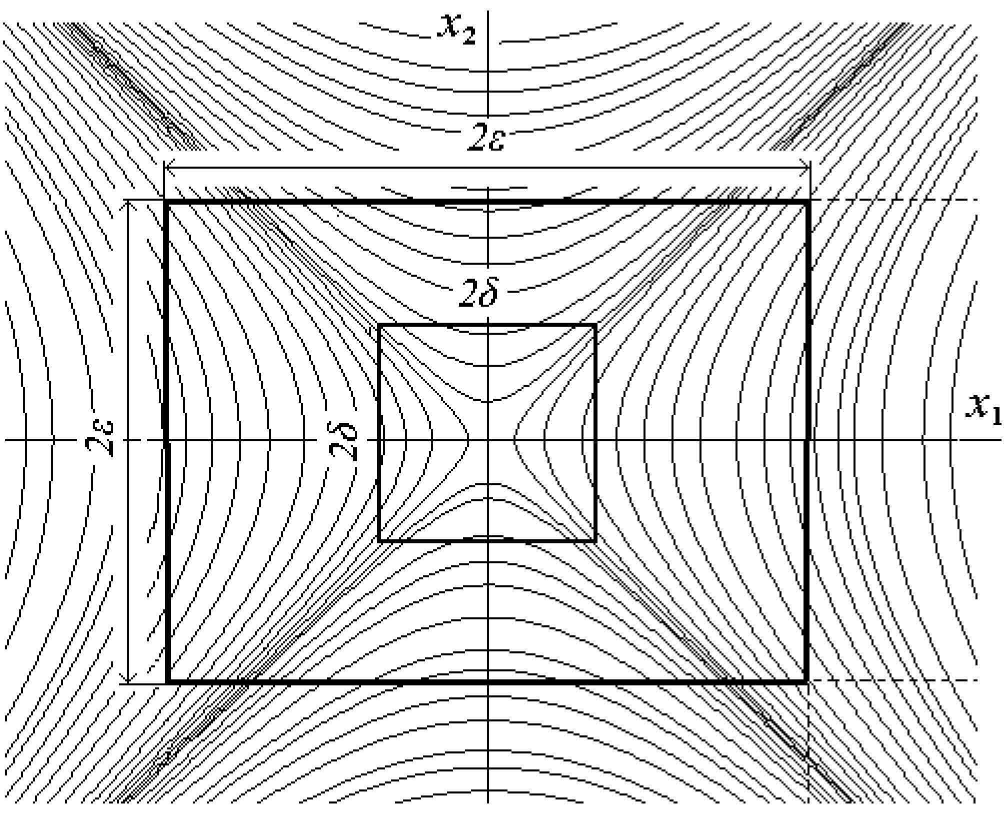

Рисунок 6.5 - Состояние равновесия типа «седло»

Пусть $a_{11}+a_{22}=0,\ a_{11}a_{22}-a_{12}a_{22}>0$, тогда корни уравнения (6.8) будут комплексно-сопряженными с нулевой вещественной частью, т.е. $\lambda_{1,2}=\pm j\beta$. Фазовые траектории, характерные для таких корней, представлены на рисунке 6.6. Выполняется условие Ляпунова (6.4) и не выполняется условие (6.5) – движения по фазовым траекториям осуществляются вокруг состояния равновесия (не приближаясь и не удаляясь). Такое состояние равновесия называется «центр» (устойчивое по Ляпунову состояние равновесия).

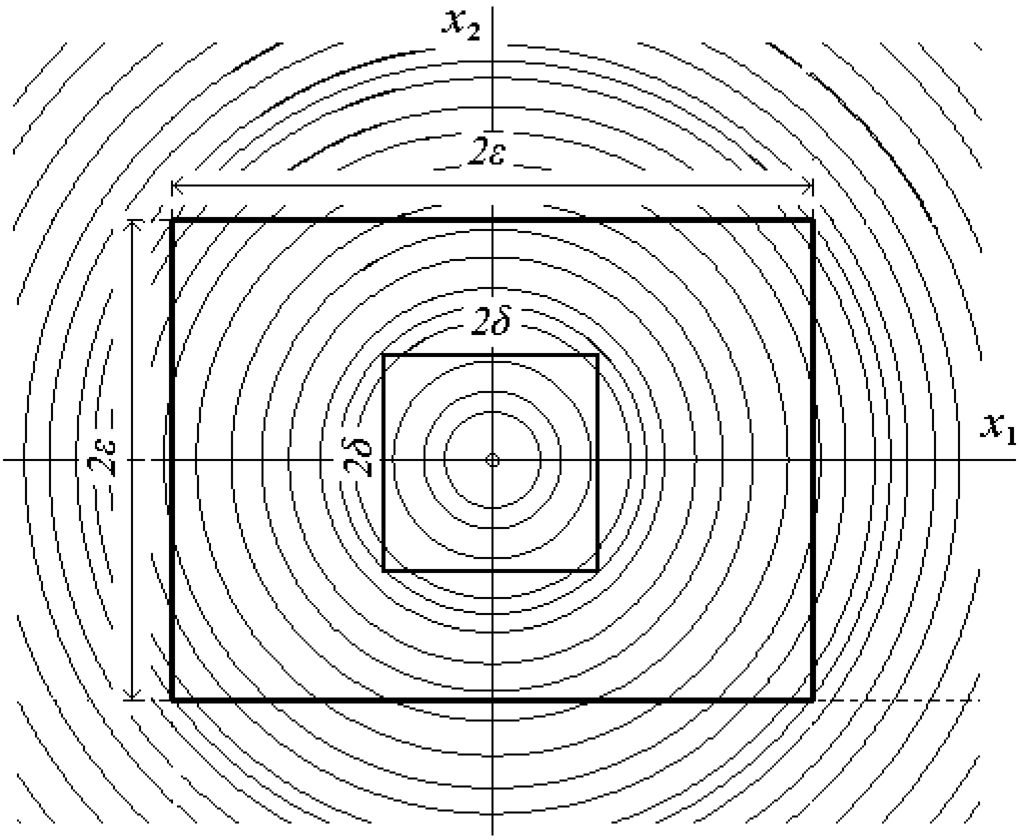

Рисунок 6.6 - Состояние равновесия типа «центр»

6.3 Первый метод Ляпунова определения устойчивости (определение устойчивости по первому приближению)

Применив линеаризацию уравнений динамики, полученных из известных законов механики, Максвелл, Вышнеградский и Стодола получили линейную модель (модель первого приближения) физического явления (поведения системы автоматического регулирования). Для линейной модели устойчивость определяется расположением всех корней характеристического уравнения в левой полуплоскости плоскости корней, неустойчивость – расположением хотя бы одного вещественного корня, или пары комплексно-сопряженных корней в правой полуплоскости. При расположении хотя бы одного корня (вещественного), либо двух корней (комплексно-сопряженных) на оси мнимых чисел (хотя бы один вещественный корень равен нулю, хотя бы одна пара комплексно-сопряженных корней имеет нулевую вещественную часть) считалось, что линейная модель рассматриваемой системы находится на границе устойчивости.

Насколько можно полученные выводы в отношении поведения линейной модели системы переносить на реальную физическую систему? Ведь допустимость линеаризации исходных уравнений динамики определялась Максвеллом, Вышнеградским и Стодолой интуитивно (строго не обосновывалась), а нелинейная модель по своему динамическому поведению значительно ближе к реальной системе.

Этот вопрос также был решен Ляпуновым. В результате строгих обоснований (доказательств теорем об устойчивости по первому приближению), Ляпуновым, были сделаны следующие утверждения:

1) если вещественные части всех корней характеристического уравнения линейной модели отрицательны (находятся в левой полуплоскости), то невозмущенное движение (состояние равновесия) соответствующей нелинейной модели устойчиво асимптотически;

2) если среди корней найдется хотя бы один вещественный положительный, или пара комплексно-сопряженных с положительной вещественной частью, то невозмущенное движение соответствующей нелинейной модели неустойчиво;

3) если среди корней имеется хотя бы один нулевой вещественный корень, или пара комплексно-сопряженных корней с нулевой вещественной частью, то вопрос об устойчивости (неустойчивости) состояния равновесия соответствующей нелинейной модели не может быть решен с помощью модели, полученной по первому приближению (линейной модели).

Значение теорем Ляпунова об устойчивости состояний равновесия по первому приближению заключается в том, что они дают строгое обоснование применению линейных моделей для суждения об устойчивости соответствующих им нелинейных моделей. Тем самым сложная задача устойчивости нелинейной модели сводится к сравнительно простой – алгебраической задаче определения корней характеристического уравнения.

Следует подчеркнуть, что метод первого приближения позволяет установить только факт устойчивости невозмущенного движения (устойчивости «в малом») – устойчивости для бесконечно малых отклонений переменных состояния от равновесия. При этом вопрос устойчивости «в большом» - будет ли система устойчива при конечных (а не бесконечно малых) отклонениях переменных состояния от равновесия остается открытым.

6.4 Второй метод (вторая метода) Ляпунова определения устойчивости (Прямой метод Ляпунова)

Согласно этому методу, для суждения об устойчивости невозмущенного движения (состояния равновесия) не обязательно знать сами возмущенные движения (решения исходных уравнений, представляющих нелинейную математическую модель системы, получаемых путем их интегрирования).

Представим себе некоторую функцию переменных состояния (координат пространства состояния $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$) $V(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$, непрерывную и однозначную вместе со своими частными производными, обращающуюся в ноль в начале координат $x_1 = 0,\ x_2 = 0, x_3 = 0, ..., x_n = 0$ (т.е. $V(0,0,0,...,0) = 0$), а при всех других значениях $x_1 \neq 0,\ x_2 \neq 0, x_3 \neq 0, ..., x_n \neq 0$ имеющей один и тот же знак. Такую функцию называют знакоопределенной функцией.

Функцию, обращающуюся в ноль не только в начале координат, но и при каких-либо других значениях $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$, а при остальных значениях $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ сохраняющей неизменный знак называют знакопостоянной функцией.

В результате строгих доказательств ряда теорем Ляпуновым были сделаны следующие утверждения:

1) если уравнения возмущенного движения таковы, что возможно найти такую знакоопределенную функцию $V(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$, полная производная которой $\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial V}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt} + \frac{\partial V}{\partial x_3}\frac{dx_3}{dt} + ... + \frac{\partial V}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt}$ в силу этих уравнений была бы знакопостоянной функцией противоположного с V знака, или тождественно равной нулю, то невозмущенное движение устойчиво по Ляпунову;

2) если уравнения возмущенного движения таковы, что возможно найти такую знакоопределенную функцию $V(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$, полная производная которой $\dot{V}$ в силу этих уравнений была бы знакоопределенной функцией противоположного с V знака, то невозмущенное движение устойчиво асимптотически;

3) если уравнения возмущенного движения таковы, что возможно найти такую знакоопределенную функцию $V(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$, полная производная которой $\dot{V}$ в силу этих уравнений была бы знакоопределенной функцией одного с функцией V знака, то невозмущенное движение неустойчиво.

Примечание. Знакоопределенная (или знакопостоянная) функция V, применяемая для решения вопросов устойчивости, в память об А.М.Ляпунове называется функцией Ляпунова.

6.5 Геометрическая интерпретация второго (прямого) метода Ляпунова

Движения системы второго порядка происходят в двухмерном пространстве переменных состояния - поверхности (частным случаем поверхности может быть плоскость). Движения системы третьего порядка происходят в трехмерном пространстве, четвертого – в четырехмерном и т.д. Поясним метод на примере динамической системы второго порядка (6.6), пространством состояний которой является плоскость переменных x_1, x_2.

Возьмем простейшую знакоопределенную функцию вида

$$V = \frac{x_1^2}{a} + \frac{x_2^2}{b}. \tag{6.9}$$

Пусть $a = b = 1$, будем задавать постоянные значения функции, например $V = 1$, $V = 2$, $V = 3$ и т.д. На плоскости состояний x_1, x_2 функция V будет выглядеть в виде семейства окружностей, охватывающих состояние равновесия и обращаться в ноль в начале координат (представлено на рисунке 6.7).

Пусть $a \neq b,\ a > 0,\ b > 0$, будем задавать постоянные значения функции V - на плоскости состояний функция будет выглядеть в виде семейства эллипсов, охватывающих состояние равновесия и также обращаться в ноль в начале координат $V(0,\ 0) = 0$. Оси эллипса совпадают с координатами x_1, x_2. При $b > a > 0$ эллипс вытянут вдоль оси x_2 (представлено на рисунке 6.8), при $a > b > 0$ - вдоль оси x_1 (представлено на рисунке 6.9).

Возьмем еще одно уравнение функции

$$V = Ax_1^2 + 2Bx_1x_2 + Cx_2^2. \tag{6.10}$$

Задаваясь различными (положительными) значениями функции V получим опять семейство эллипсов, оси которых в зависимости от численных значений коэффициентов A, B, C уже могут не совпадать с осями x_1, x_2 (представлено на рисунке 6.10).

Согласно определению Ляпунова об устойчивости состояния равновесия, состояние равновесия асимптотически устойчиво, если все фазовые траектории (все движения в пространстве состояний) притягиваются этим состоянием равновесия (все траектории стремятся к состоянию равновесия); состояние равновесия неустойчиво, если все фазовые траектории (все движения в пространстве состояний) направлены от этого состояния равновесия в бесконечность. Состояние равновесия считается устойчивым по Ляпунову, если движения не уходят в бесконечность, но и не притягиваются состоянием равновесия, а все время находятся в некоторой окрестности состояния равновесия.

Представим, что мы не знаем, как выглядят фазовые траектории, т.е. мы не знаем притягиваются ли они состоянием равновесия или отталкиваются. Можно ли по исходным уравнениям динамики определить устойчивость (неустойчивость) состояния равновесия? Можно, если удастся найти функцию Ляпунова.

Примечание. До сих пор не существует общих методов отыскания функции Ляпунова. Поиском методов нахождения функции Ляпунова занимались многие ученые: В.И.Зубов (Ленинград), Е.А.Барбашин (Москва), А.И.Лурье (Москва), И.Г.Малкин (Москва), С.Левшец и Ж.Ла-Салль (США) и др.

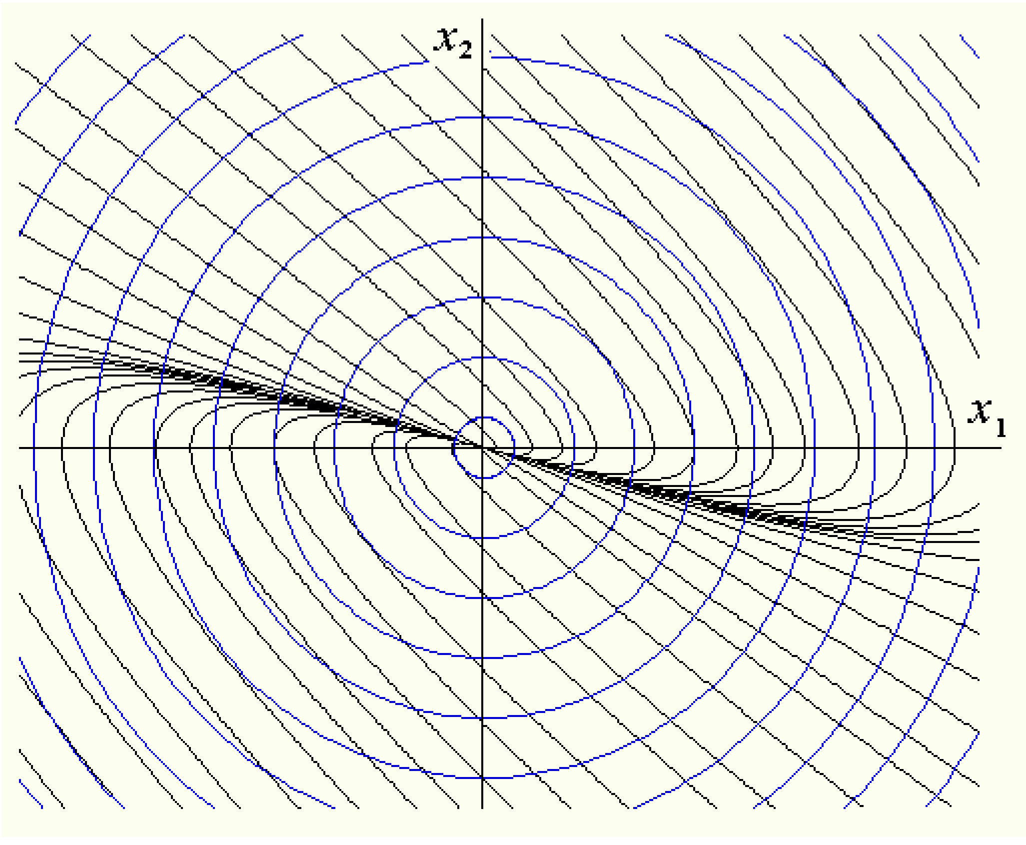

Рисунок 6.7 – Функция $V(x_1, x_2)$ не является функцией Ляпунова

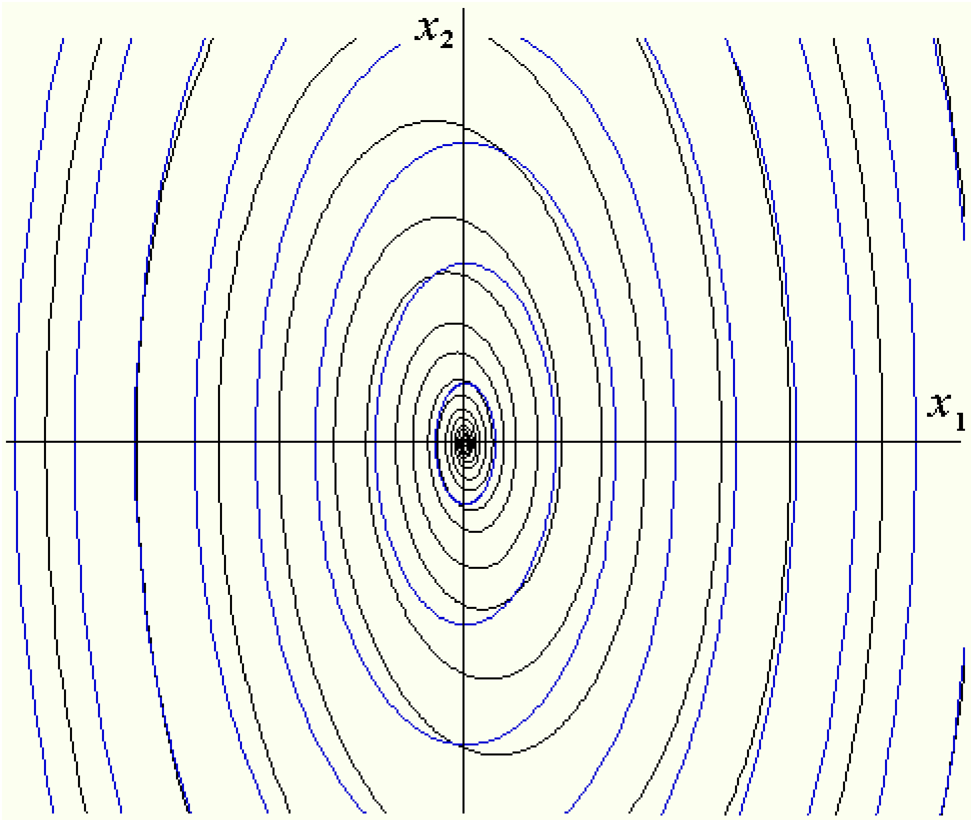

Рисунок 6.8 – Функция $V(x_1,\ x_2)$ является функцией Ляпунова

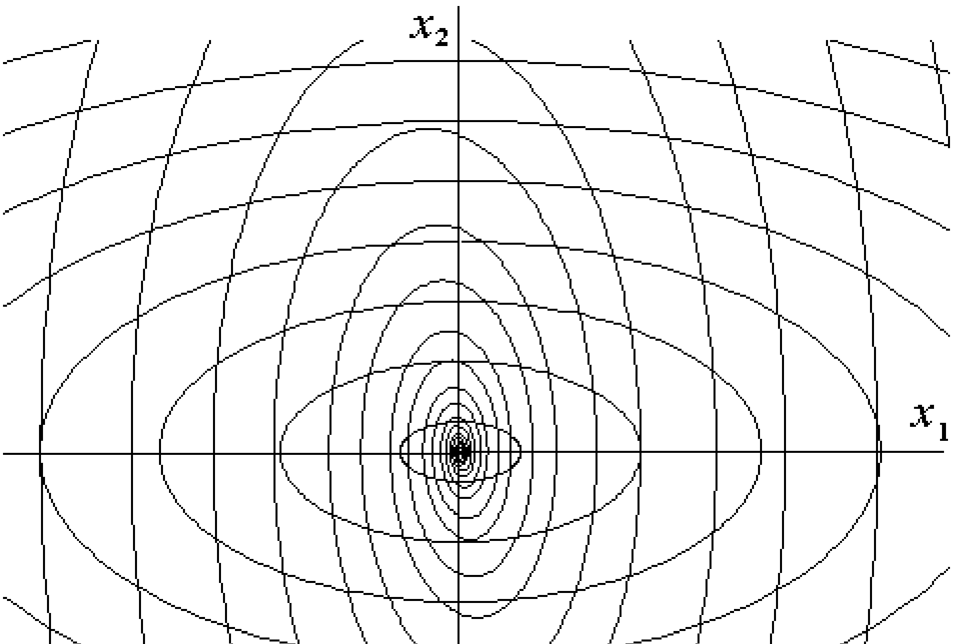

Рисунок 6.9 - Функция $V(x_1,\ x_2)$ не является функцией Ляпунова

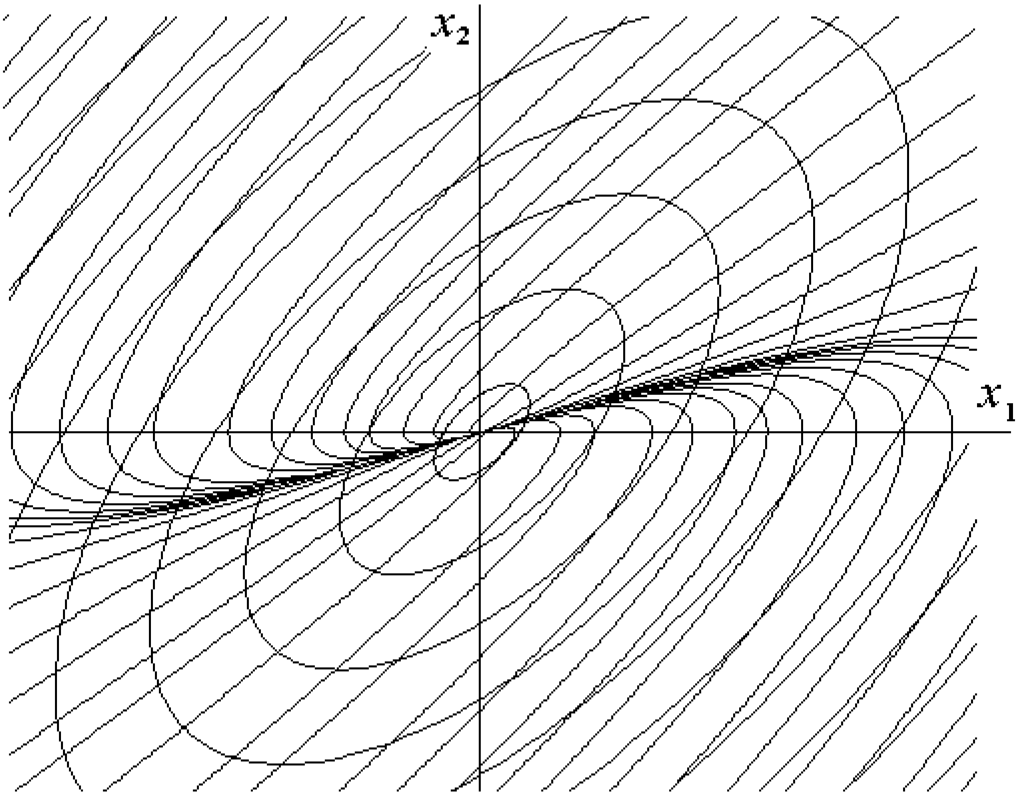

Рисунок 6.10 - Функция $V(x_1, x_2)$ является функцией Ляпунова

Поскольку координаты плоскости состояний x_1, x_2 являются функциями времени, полная производная сложной функции $V(x_1, x_2)$ будет выглядеть как

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial V}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt}. \qquad (6.11)$$

Выясним смысл выражения (6.11). Обратим внимание, что с увеличением значений координат x_1, x_2 значение функции V возрастает. Определим вектор-градиент возрастания функции V как:

$$Grad(V) = \bar{i}\frac{\partial V}{\partial x_1} + \bar{j}\frac{\partial V}{\partial x_2}, \qquad (6.12)$$

где $\bar{i}, \bar{j}$ - единичные векторы – орты координат.

Рассмотрим плоскость x_1, x_2 в смысле плоскости состояний системы. Во время движения системы ее координаты x_1, x_2 изменяются, принимая в каждый момент времени определенные значения. Если координаты представить в виде точки (такая точка называется изображающей), то перемещение этой точки во времени и составит фазовую траекторию. Мгновенная скорость перемещения изображающей точки по фазовой траектории определяется выражением

$$\bar{u} = \bar{i}\,\frac{dx_1}{dt} + \bar{j}\,\frac{dx_2}{dt}\,. \tag{6.13}$$

Возьмем скалярное произведение вектора (6.12) и вектора (6.13)

$$Gr\bar{a}d(V)\cdot\bar{u} = \left|Grad(V)\right|\cdot\left|u\right|\cdot Cos(\varphi) = \frac{\partial V}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial V}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt} = \dot{V}\,. \tag{6.14}$$

Итак, геометрический смысл $\dot{V}$ - скалярное произведение двух векторов (6.14), один вектор показывает направление возрастания функции V, другой – мгновенную скорость перемещения изображающей точки на плоскости.

Если угол между векторами тупой ($90^0 < \varphi < 180^0$), то $Cos(\varphi) < 0$ и соответственно $\dot{V} < 0$. С геометрической точки зрения это означает, что все фазовые траектории пересекают поверхности уровня функции в сторону ее уменьшения - в сторону состояния равновесия (представлено на рисунке 6.11).

Если угол между векторами острый ($0^0 < \varphi < 90^0$), то $Cos(\varphi) > 0$ и соответственно $\dot{V} > 0$. С геометрической точки зрения это означает, что все фазовые траектории пересекают поверхности уровня функции в сторону ее увеличения - от состояния равновесия (представлено на рисунке 6.12).

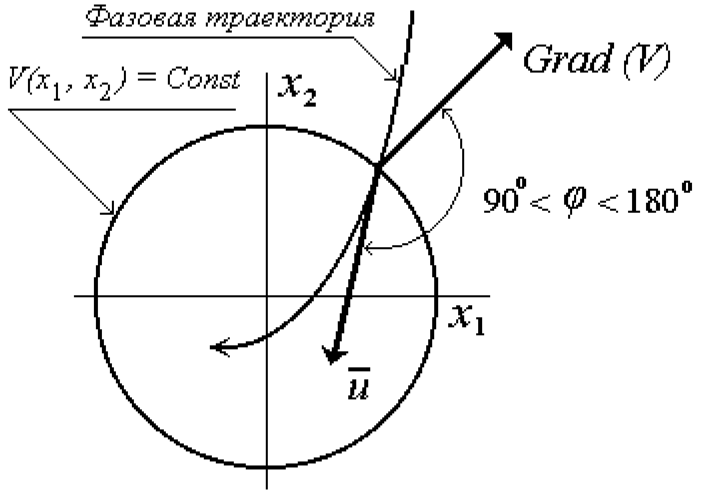

Рисунок 6.11 – Геометрическая интерпретация метода ($90^\circ < \varphi < 180^\circ$)

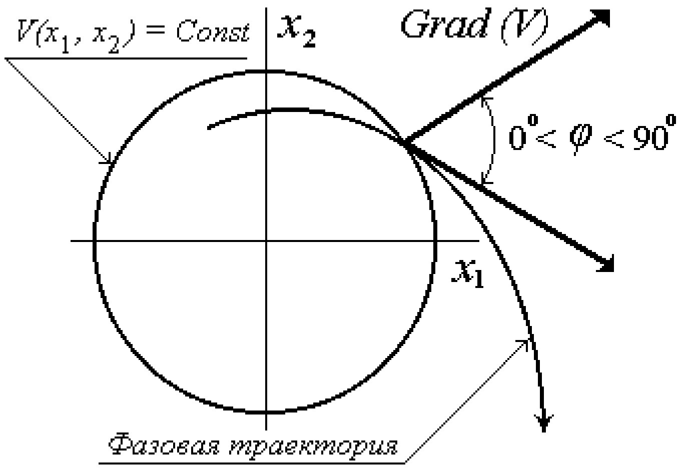

Рисунок 6.12 - Геометрическая интерпретация метода ($0^\circ < \varphi < 90^\circ$)

Рассмотрим пример 1. Пусть уравнения возмущенного движения имеют вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 - x_2 + x_2(x_1 + x_2); \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_1(x_1 + x_2). \end{cases} \tag{6.15}$$

Требуется определить устойчивость (неустойчивость) состояния равновесия

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0. \tag{6.16}$$

Применим первый метод Ляпунова – определение устойчивости состояний равновесия (6.16) для нелинейных уравнений возмущенного движения (6.15) по соответствующей линейной модели (соответствующим линейным уравнениям возмущенного движения). Необходимо линеаризовать уравнения (6.15), для этого будем считать, что переменные $x_1(t)$, $x_2(t)$ всегда находятся вблизи состояния равновесия (переменные $x_1(t)$ и $x_2(t)$ достаточно малы). Тогда произведение переменных будет малой величиной более высокого порядка. Пренебрежение малыми величинами более высокого порядка в уравнениях (6.15) позволяет получить соответствующую линейную модель.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 - x_2; \quad \text{пренебрегаем} \quad \rightarrow \ +x_2 x_1 + x_2^2 \\ \dot{x}_2 = x_1. \qquad\quad \text{пренебрегаем} \quad \rightarrow \ -x_1^2 - x_1 x_2 \end{cases} \tag{6.17}$$

Характеристическое уравнение системы (7.17) имеет вид

$$\lambda^2 + \lambda + 1 = 0. \tag{6.18}$$

Корни уравнения (6.18) $\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2}$ - комплексно-сопряженные с отрицательной вещественной частью. Состояние равновесия устойчиво, тип состояния равновесия «устойчивый фокус».

Рассмотрим пример 2. Уравнения возмущенного движения имеют вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + x_2 x_1; \\ \dot{x}_2 = 4x_2 - x_1 - x_1^2. \end{cases} \tag{6.19}$$

Как и в предыдущем примере требуется определить устойчивость (неустойчивость) состояния равновесия $x_1 = 0,\ x_2 = 0$. Рассмотрим соответствующую линейную модель уравнений (6.19)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = 4x_2 - 3x_1. \end{cases} \tag{6.20}$$

Характеристическое уравнение (7.20) имеет вид $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$, корни которого $\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = 1$ - вещественные положительные. Состояние равновесия неустойчиво, тип состояния равновесия «неустойчивый узел».

Рассмотрим пример 3. Уравнения возмущенного движения следующие

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + 2x_2 x_1 - x_1^3; \\ \dot{x}_2 = -2x_1 - 4x_1^2. \end{cases} \tag{6.21}$$

Соответствующая линейная модель имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = -2x_1. \end{cases} \tag{6.22}$$

Корни характеристического уравнения $\lambda^2 + 2 = 0$ чисто мнимые (комплексно-сопряженные с нулевой вещественной частью). Определить устойчивость (неустойчивость) состояния равновесия с помощью первого метода не предоставляется возможным, состояние равновесия может оказаться как устойчивым, так и неустойчивым.

Применим второй метод Ляпунова. Возьмем положительную знакоопределенную функцию вида

$$V = x_1^2 + x_2^2. \tag{6.23}$$

Если производная $\dot{V}$ окажется знакоопределенной функцией противоположного с V знака, т.е. $\dot{V} < 0$, то состояние равновесия устойчиво асимптотически, если $\dot{V} = 0$ - устойчиво по Ляпунову, если одного с V знака, т.е. $\dot{V} > 0$ - неустойчиво.

Вычислим полную производную сложной функции $V(x_1, x_2)$, а именно:

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial V}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt} = 2x_1(x_2 + 2x_1x_2 - x_1^3) + 2x_2(-2x_1 - 4x_1^2).$$

После приведения подобных слагаемых получим

$$\dot{V} = 2x_1x_2 - 2x_1^4 - 6x_1^2x_2. \tag{6.24}$$

Функция (6.24) не является ни знакоопределенной ни знакопостоянной. Следовательно, нам не удалось подобрать функцию Ляпунова.

Возьмем другую положительную знакоопределенную функцию вида

$$V = 2x_1^2 + x_2^2. \tag{6.25}$$

Вычислим производную $\dot{V} = 4x_1(x_2 + 2x_1x_2 - x_1^3) + 2x_2(-2x_1 - 4x_1^2)$. После раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых получим

$$\dot{V} = -2x_1^4. \tag{6.26}$$

Функция (6.26) является знакоопределенной функцией противоположного с функцией (6.25) знака. Нам удалось подобрать функцию Ляпунова (функция (6.25)) и доказать асимптотическую устойчивость состояния равновесия системы (6.21). В каждой точке плоскости (за исключением точки состояния равновесия) характер пересечения линий уровня функции Ляпунова (6.25) и фазовых траекторий, получаемых при интегрировании уравнений (6.21), соответствует геометрическому образу, представленному на рисунке 6.11.

На рисунках 6.7, 6.9 геометрически представлены случаи неудачного подбора знакоопределенной функции, на рисунках 6.8, 6.10 – удачного (знакоопределенная функция является функцией Ляпунова).

Рисунок 6.11 демонстрирует, насколько может быть труден подбор функции Ляпунова в случае состояния равновесия типа «седло».

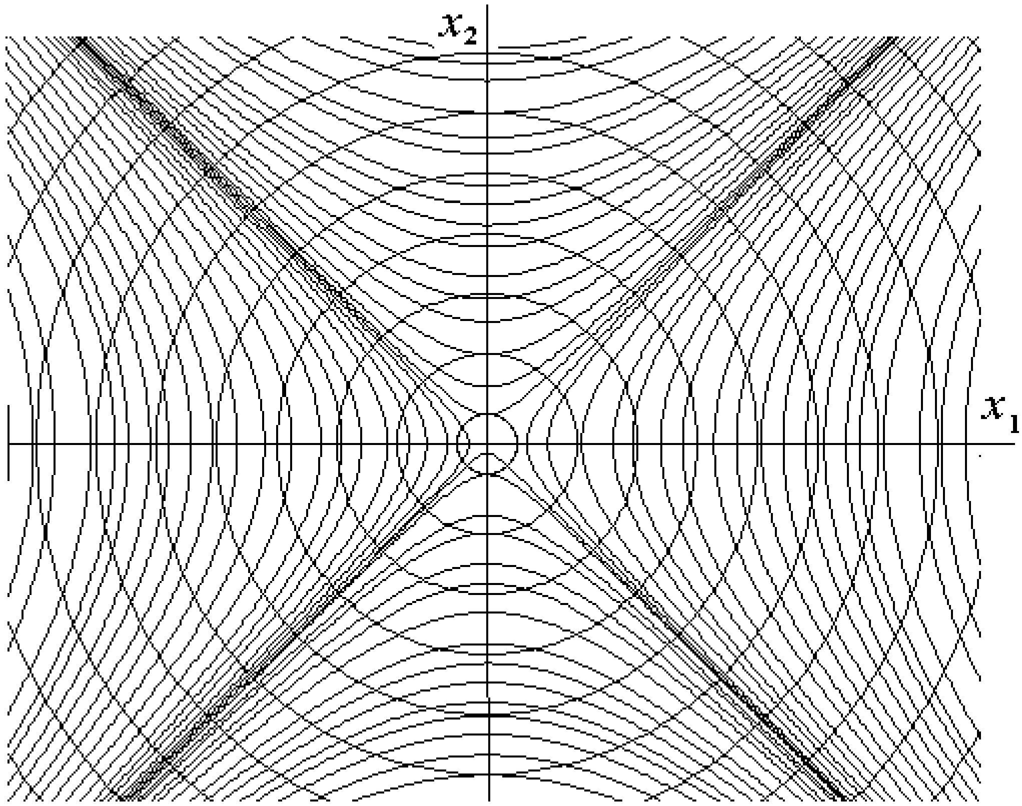

Рисунок 6.11 – Состояние равновесия типа «седло». Подбор функции Ляпунова