

# «ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ»

## (часть 2, лекция 3)

### «Преобразование автоматических систем к каноническому виду»

(проф. В.Н.Шамберов)

Наиболее общей формой описания автоматической системы является нормальная (или стандартная) форма, например

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}v, \quad y = \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle + d_0 v. \quad (4.1)$$

В развернутом векторно-матричном виде описание (4.1) выглядит следующим образом

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} \times v;$$

$$y = [c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_n] \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} + d_0 \times v.$$

В скалярном виде описание автоматической системы (4.1) выглядит

$$\dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + b_1v;$$

$$\dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + b_2v;$$

.....

$$\dot{x}_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + b_nv;$$

$$y = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n + d_0v.$$

Условия полной управляемости и полной наблюдаемости системы (4.1) следующие

$$\det[\mathbf{b} \quad \mathbf{A}\mathbf{b} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{b} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}] \neq 0, \quad \det[\mathbf{c}^T \quad \mathbf{A}^T\mathbf{c}^T \quad (\mathbf{A}^T)^2\mathbf{c}^T \quad \dots \quad (\mathbf{A}^T)^{n-1}\mathbf{c}^T] \neq 0.$$

Структура системы (структурная математическая модель) представлена на рисунке 4.1

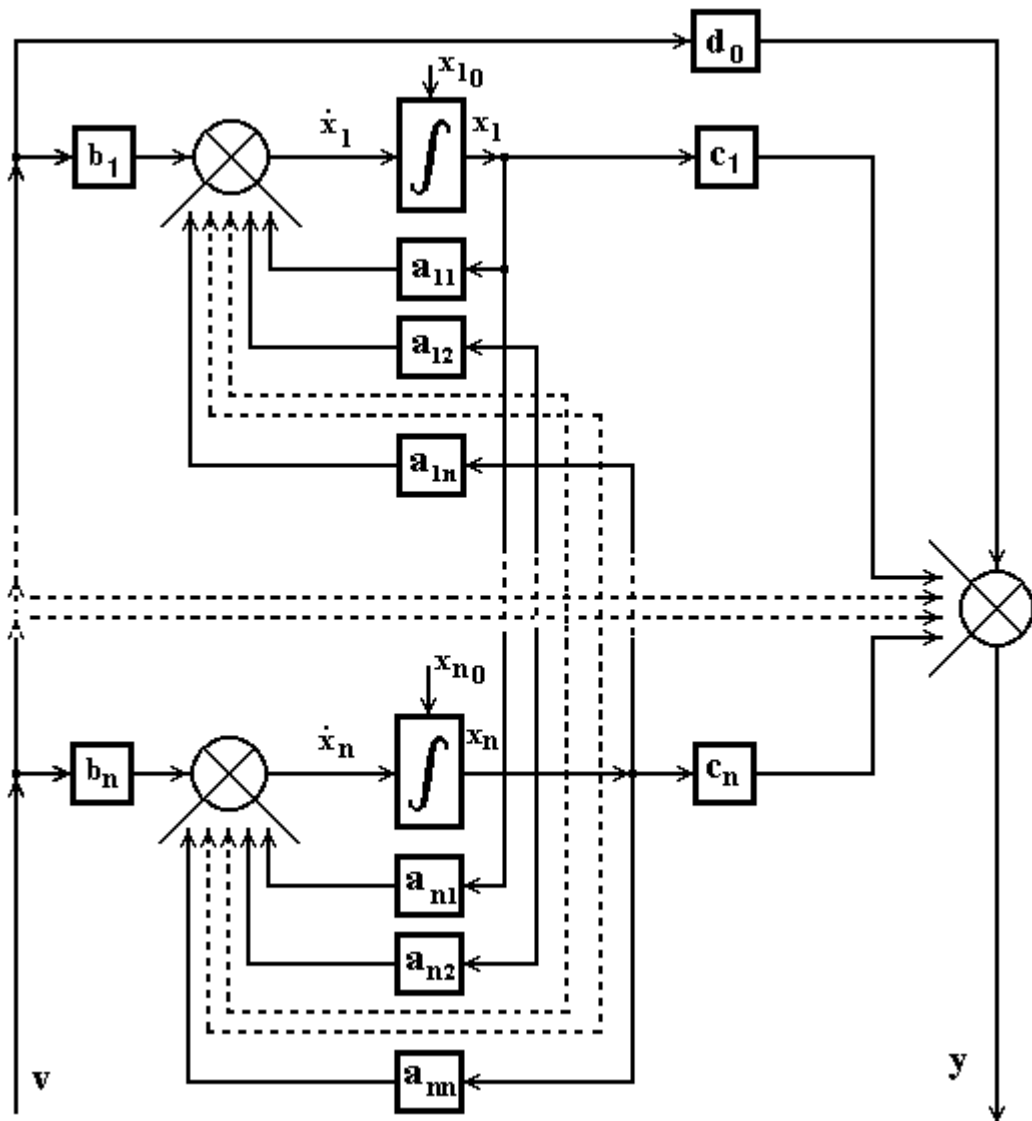


Рисунок 4.1 – Структурная математическая модель системы (4.1)

В тех случаях, когда собственные числа  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  матрицы состояния  $\mathbf{A}$  вещественные и различные, система (4.1) может быть преобразована к каноническому виду

$$\dot{\mathbf{g}} = \Lambda \mathbf{g} + \mathbf{b}_m v, \quad y = \langle \mathbf{c}_m, \mathbf{g} \rangle + d_0 v, \quad (4.2)$$

где  $\Lambda$  - диагональная матрица Жордана (Camille Jordan, 1838 - 1922).

В развернутом векторно-матричном виде описание (4.2) выглядит следующим образом

$$\begin{bmatrix} \dot{g}_1 \\ \dot{g}_2 \\ \dots \\ \dot{g}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \dots \\ g_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{m_1} \\ b_{m_2} \\ \dots \\ b_{m_n} \end{bmatrix} \times v;$$

$$y = \begin{bmatrix} c_{m_1} & c_{m_2} & \dots & c_{m_n} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \dots \\ g_n \end{bmatrix} + d_0 \times v.$$

В скалярном виде описание автоматической системы выглядит следующим образом

$$\dot{x}_1 = \lambda_1 g_1 + b_{m_1} v;$$

$$\dot{x}_2 = \lambda_2 g_2 + b_{m_2} v;$$

.....

$$\dot{x}_n = \lambda_n g_n + b_{m_n} v;$$

$$y = c_{m_1} x_1 + c_{m_2} x_2 + \dots + c_{m_n} x_n + d_0 v.$$

Если система (4.1) обладает свойством полной управляемости, то  $b_{m_1} \neq 0, b_{m_2} \neq 0, \dots, b_{m_n} \neq 0$ .

Если система (4.1) обладает свойством полной управляемости, то  $c_{m_1} \neq 0, c_{m_2} \neq 0, \dots, c_{m_n} \neq 0$ .

Структура системы (4.2) представлена на рисунке 4.2.

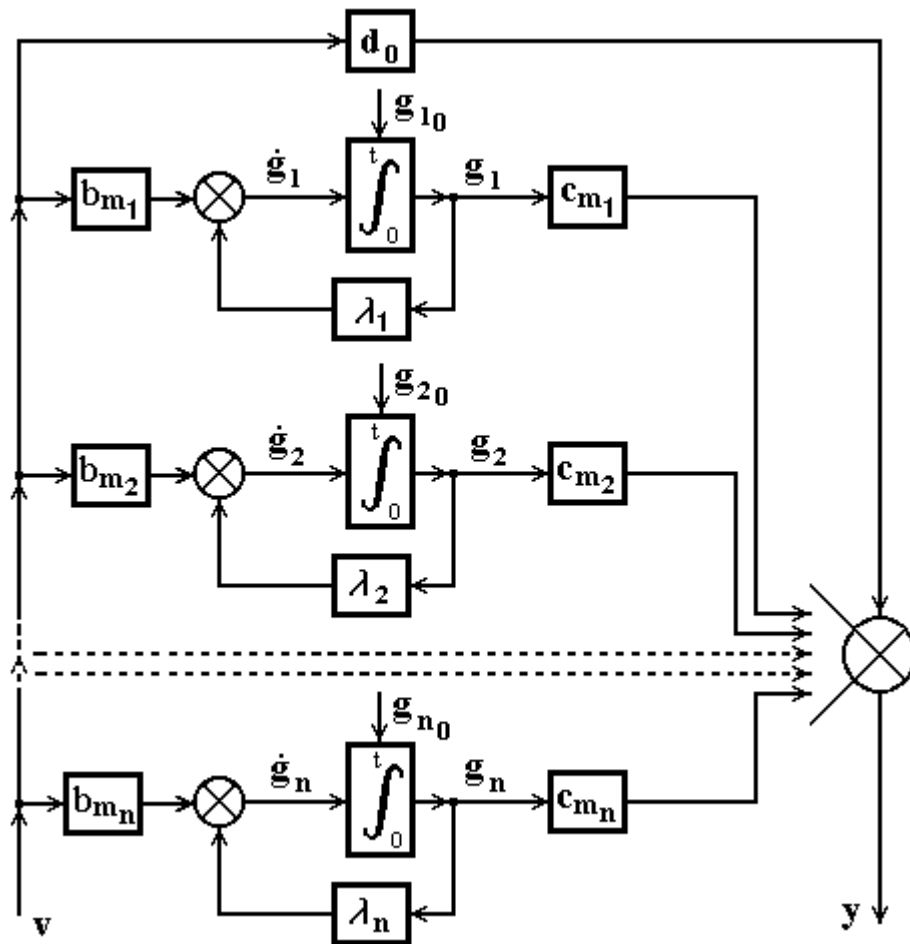


Рисунок 4.2 – Структурная математическая модель системы (4.2)

**4.1. Метод преобразования с помощью присоединенной матрицы.** Преобразование системы вида (4.1), структура которой представлена на рисунке 4.1, к системе вида (4.2), структура которой представлена на рисунке 4.2, можно осуществить линейным преобразованием  $\mathbf{x} = \mathbf{M}\mathbf{g}$ ,  $\mathbf{g} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{x}$ , при этом  $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M} = \Lambda$ ,  $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{M} = \mathbf{I}$ ,  $\mathbf{b}_m = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}_m = \mathbf{c}\mathbf{M}$ , где матрица  $\mathbf{M}$  получается на основе  $Adj[\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}]$  (присоединенной матрицы). При этом столбцы матрицы  $\mathbf{M}$  выбираются пропорционально произвольному столбцу матрицы  $Adj[\mathbf{A} - \lambda_i\mathbf{I}]$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ .

**Пример 4.1.1.** Рассмотрим систему (4.1) при  $n = 2$ .

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} v, \quad y = [c_1 \quad c_2] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + d_0 \cdot v. \quad (4.3)$$

В структурном виде система (4.3) представлена на рисунке 4.3.

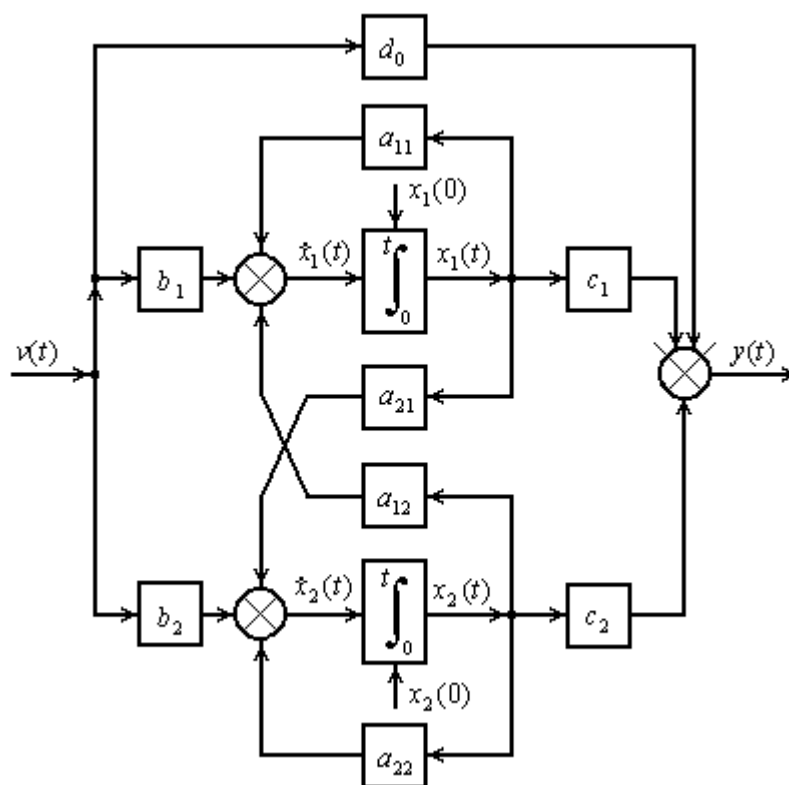


Рисунок 4.3 – Структура системы (4.3)

Система обладает свойством полной управляемости, если

$$\det[\mathbf{b} \quad \mathbf{A}\mathbf{b}] = a_{21}b_1^2 + (a_{22} - a_{11})b_1b_2 - a_{12}b_2^2 \neq 0.$$

Система обладает свойством полной наблюдаемости, если

$$\det[\mathbf{c}^T \quad \mathbf{A}^T\mathbf{c}^T] = a_{12}c_1^2 + (a_{22} - a_{11})c_1c_2 - a_{21}c_2^2 \neq 0.$$

Линейным преобразованием  $\mathbf{x} = \mathbf{M}\mathbf{g}$ ,  $\mathbf{g} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{x}$  приведем систему к виду

$$\begin{bmatrix} \dot{g}_1 \\ \dot{g}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{m_1} \\ b_{m_2} \end{bmatrix} \cdot v, \quad y = \begin{bmatrix} c_{m_1} & c_{m_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} + d_0 \cdot v \quad (4.4)$$

со структурой представленной на рисунке 4.4.

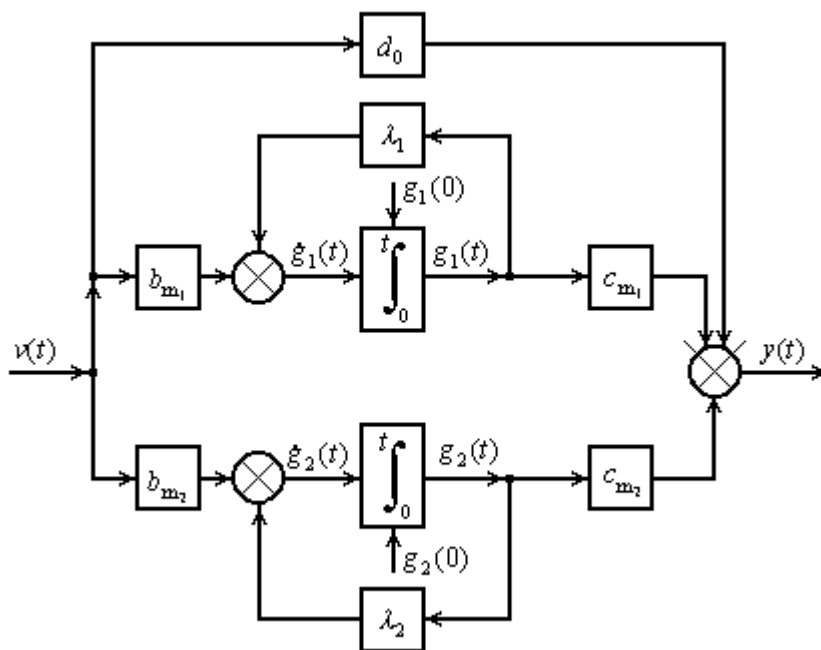


Рисунок 4.4 – Структура преобразованной системы (4.3) в общем виде

Матрица  $Adj[\mathbf{A} - \lambda_i\mathbf{I}]$ ,  $i = 1, 2$  при: а)  $\lambda = \lambda_1$  и б)  $\lambda = \lambda_2$ , где  $\lambda_1, \lambda_2$  (при этом  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ) - собственные числа матрицы  $\mathbf{A}$ , будет иметь соответственно вид:

$$\text{а) } Adj[\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I}] = \begin{bmatrix} a_{22} - \lambda_1 & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} - \lambda_1 \end{bmatrix}, \quad \text{б) } Adj[\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{I}] = \begin{bmatrix} a_{22} - \lambda_2 & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} - \lambda_2 \end{bmatrix}. \quad (4.4)$$

Выбрав, например, первый столбец матрицы  $\mathbf{M}$  пропорционально первому столбцу матрицы (4.4-а), второй – пропорционально второму столбцу матрицы (4.4-б), получим матрицу канонического преобразования

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} k_1(a_{22} - \lambda_1) & -k_2 a_{12} \\ -k_1 a_{21} & k_2(a_{11} - \lambda_2) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} k_2(a_{11} - \lambda_2) & k_2 a_{12} \\ k_1 a_{21} & k_1(a_{22} - \lambda_1) \end{bmatrix}}{k_1 k_2 [(a_{11} - \lambda_2)(a_{22} - \lambda_1) - a_{12} a_{21}]}, \quad (4.5)$$

где  $k_1, k_2$  – любые вещественные числа (не нулевые).

В преобразованном виде система (4.3) соответствует описанию (4.2) при  $n = 2$  со структурой, представленной на рисунке 4.4. Элементы матриц  $\mathbf{b}_m$  и  $\mathbf{c}_m$  определяются в соответствии с преобразованием,  $\mathbf{b}_m = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}_m = \mathbf{c} \mathbf{M}$ .

Допустим элементы матрицы состояния  $\mathbf{A}$  имеют следующие числовые значения:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{тогда характеристический полином системы:}$$

$$\det \begin{bmatrix} -4 - \lambda & -3 \\ 2 & 1 - \lambda \end{bmatrix} = -(4 + \lambda)(1 - \lambda) + 6 = \lambda^2 + 3\lambda + 2.$$

Собственные числа матрицы состояния (корни характеристического полинома):  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = -2$  и соответственно

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} k_1(1+1) & k_2 3 \\ -k_1 2 & k_2(-4+2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2k_1 & 3k_2 \\ -2k_1 & -2k_2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{M}^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} k_2(-4+1) & -k_2 3 \\ k_1 2 & k_1(1+2) \end{bmatrix}}{k_1 k_2 [(-4+2)(1+1) - 3 \cdot 2]} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{k_1} & -\frac{3}{2k_1} \\ \frac{1}{k_2} & \frac{1}{k_2} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{b}_m = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{k_1} & -\frac{3}{2k_1} \\ \frac{1}{k_2} & \frac{1}{k_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2b_1 + 3b_2}{2k_1} \\ \frac{b_1 + b_2}{k_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{m_1} \\ b_{m_2} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{c}_m = \mathbf{c}\mathbf{M} = [c_1 \quad c_2] \cdot \begin{bmatrix} 2k_1 & 3k_2 \\ -2k_1 & -2k_2 \end{bmatrix} = [2k_1(c_1 - c_2) \quad k_2(3c_1 - 2c_2)] = [c_{m_1} \quad c_{m_2}]$$

Если система обладает свойством полной управляемости, то  $b_{m_1} \neq 0$  и  $b_{m_2} \neq 0$ , или:

$$2b_1 + 3b_2 \neq 0 \text{ и } b_1 + b_2 \neq 0.$$

Если система обладает свойством полной наблюдаемости, то  $c_{m_1} \neq 0$  и  $c_{m_2} \neq 0$ , или:

$$c_1 - c_2 \neq 0 \text{ и } 3c_1 - 2c_2 \neq 0.$$

Структура преобразованной системы (4.3) при  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$  представлена на рисунке

4.5.

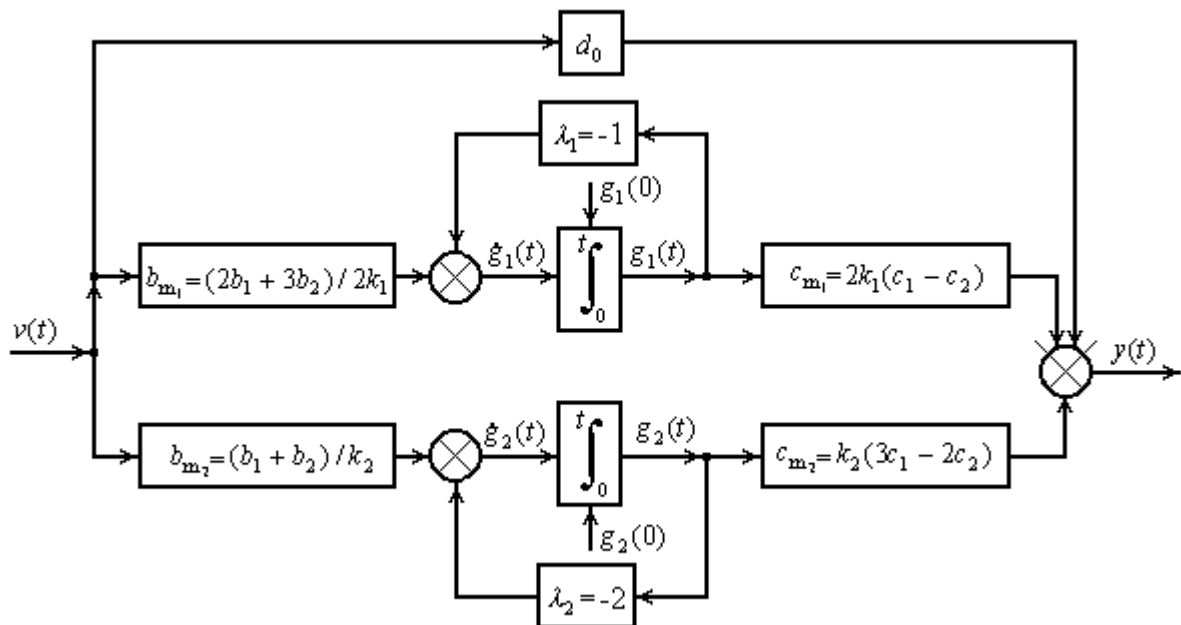


Рисунок 4.5 – Структура преобразованной системы (4.3) при  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$  и  $k_1 = 1, k_2 = 1$



**Пример 4.1.2.** Допустим система (4.3) задана следующим описанием

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot v, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + v. \quad (4.6)$$

Структурный вид системы (4.6) представлен на рисунке 4.6.

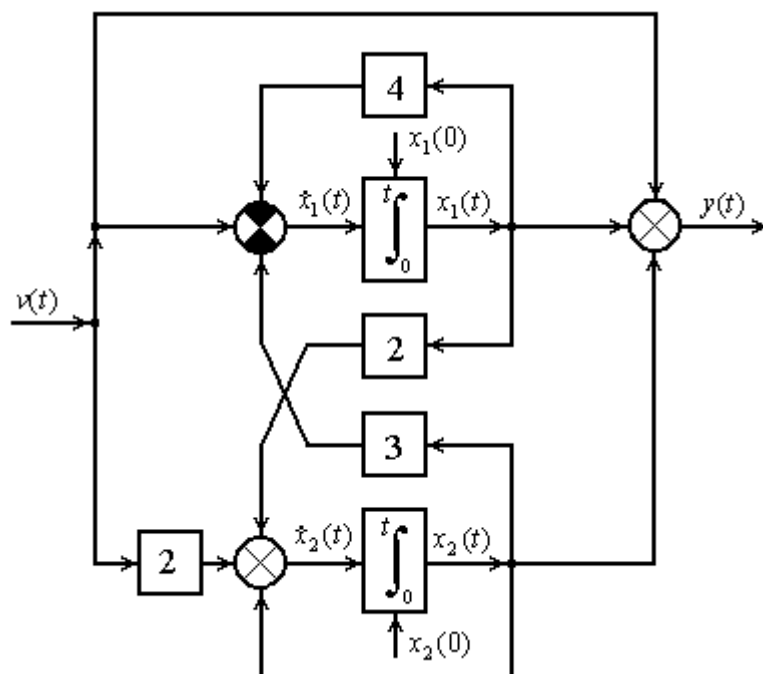


Рисунок 4.6 – Структура системы (4.6)

Система не обладает свойством полной наблюдаемости:

$$a_{12}c_1^2 + (a_{22} - a_{11})c_1c_2 - a_{21}c_2^2 = -3 \cdot 1^2 + (1 + 4) \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 1^2 = 0$$

Система обладает свойством полной управляемости:

$$a_{21}b_1^2 + (a_{22} - a_{11})b_1b_2 - a_{12}b_2^2 = 2 \cdot 1^2 + (1 + 4) \cdot 1 \cdot 2 - (-3) \cdot 2^2 = 24 \neq 0$$

Преобразованием  $\mathbf{x} = \mathbf{M}\mathbf{g}$ ,  $\mathbf{g} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{x}$  приведем систему к каноническому виду (4.4)

Собственные числа матрицы состояния:  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = -2$ .

Матрицу канонического преобразования получим на основе  $Adj[\mathbf{A} - \lambda_i\mathbf{I}]$ ,  $i = 1, 2$  при  $k_1 = 1$  и  $k_2 = 1$ .

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}, \mathbf{M}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{3}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Элементы матриц  $\mathbf{b}_m$  и  $\mathbf{c}_m$ :

$$\mathbf{b}_m = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{3}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_m = [1 \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} = [0 \quad 1].$$

Каноническая форма исходной системы (развернутая векторно-матричная запись):

$$\begin{bmatrix} \dot{g}_1 \\ \dot{g}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot v, \quad y = [0 \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} + v, \text{ где}$$

$$g_1 = -x_1 - \frac{3}{2}x_2, \quad g_2 = x_1 + x_2.$$

Структурный вид записи приведенной к канонической форме системы (4.6) представлен на рисунке 4.7.

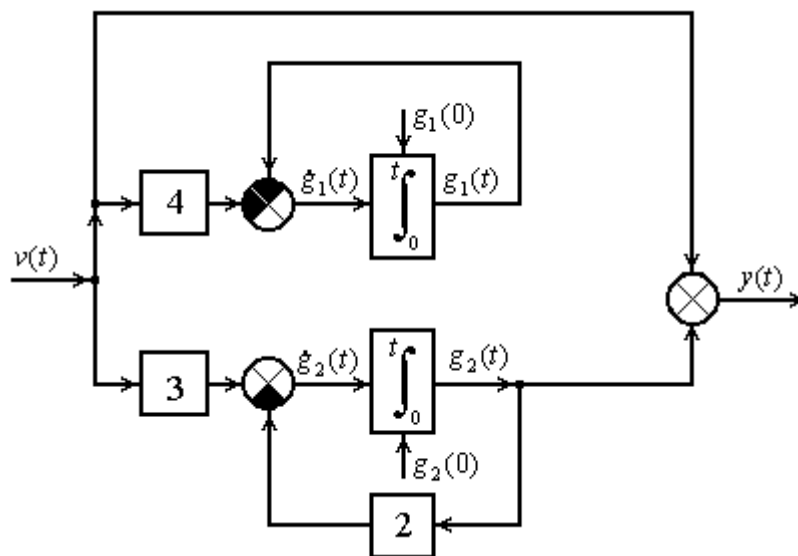


Рисунок 4.7 – Структура преобразованной системы (4.6)

**4.2. Метод преобразования с помощью матрицы Вандермонда.** Часто система в стандартной форме задана с матрицей состояния  $\mathbf{A}$  определенного вида

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots & -\alpha_{n-2} & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}. \quad (4.7)$$

В этом случае столбцы матрицы  $\mathbf{M}$  можно выбрать пропорционально столбцам матрицы Вандермонда

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} k_1 \lambda_1^0 & k_2 \lambda_2^0 & \dots & k_n \lambda_n^0 \\ k_1 \lambda_1^1 & k_2 \lambda_2^1 & \dots & k_n \lambda_n^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_1 \lambda_1^{n-1} & k_2 \lambda_2^{n-1} & \dots & k_n \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}, \quad (4.8)$$

где  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  - собственные числа матрицы  $\mathbf{A}$ ;  $k_1, k_2, \dots, k_n$  - коэффициенты - любые вещественные числа (за исключением нуля).

**Пример 4.2.1** Допустим, система задана в следующем виде

$$\ddot{y} + \alpha_1 \dot{y} + \alpha_0 y = \beta_2 \ddot{v} + \beta_1 \dot{v} + \beta_0 v. \quad (4.9)$$

Система может быть приведена к стандартной форме (4.1) при  $n = 2$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} v, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + d_0 v, \quad (4.10)$$

где  $d_0 = \beta_2$ ;  $b_1 = -\alpha_1 \beta_2 + \beta_1$ ;  $b_2 = (\alpha_1^2 - \alpha_0) \beta_2 - \alpha_1 \beta_1 + \beta_0$ ,  $x_2 = \dot{y} - b_1 v - d_0 \dot{v}$ ,  
 $x_1 = y - d_0 v$

В структурном виде система представлена на рисунке 4.8

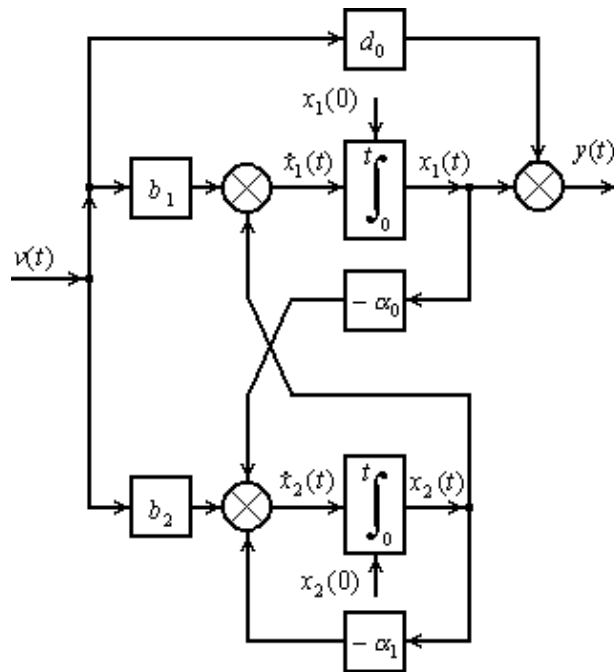


Рисунок 4.8 – Структура системы (4.9), приведенной к стандартному виду (4.10)

Система (4.9) всегда полностью наблюдаема. Для полной управляемости системы необходимо выполнение условия:  $\det[\mathbf{b} \quad \mathbf{Ab}] = \alpha_0 b_1^2 + \alpha_1 b_1 b_2 + b_2^2 \neq 0$ .

Поскольку матрица состояния системы соответствует матрице (4.7) применим преобразование системы к каноническому виду (4.2), основанное на использовании матрицы Вандермонда (4.8) при  $n = 2$ .

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ k_1 \lambda_1 & k_2 \lambda_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} k_2 \lambda_2 & -k_2 \\ -k_1 \lambda_1 & k_1 \end{bmatrix}}{k_1 k_2 (\lambda_2 - \lambda_1)}.$$

Допустим  $\alpha_0 = 2$ ,  $\alpha_1 = 3$ , тогда корнями характеристического уравнения  $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$  являются  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = -2$ .

В результате получим матрицу канонического преобразования

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ -k_1 & -2k_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{k_1} & \frac{1}{k_1} \\ -\frac{1}{k_2} & -\frac{1}{k_2} \end{bmatrix}.$$

В результате получим систему вида (4.2), где элементы матриц  $\mathbf{b}_m$ ,  $\mathbf{c}_m$  определяются в соответствии с преобразованием, как

$$\mathbf{b}_m = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \frac{2}{k_1} & \frac{1}{k_1} \\ -\frac{1}{k_2} & -\frac{1}{k_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2b_1 + b_2}{k_1} \\ -\frac{b_1 + b_2}{k_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{m_1} \\ b_{m_2} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{c}_m = \mathbf{cM} = [1 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ -k_1 & -2k_2 \end{bmatrix} = [k_1 \quad k_2] = [c_{m_1} \quad c_{m_2}].$$

Структура преобразованной системы (4.7) представлена на рисунке 4.4.

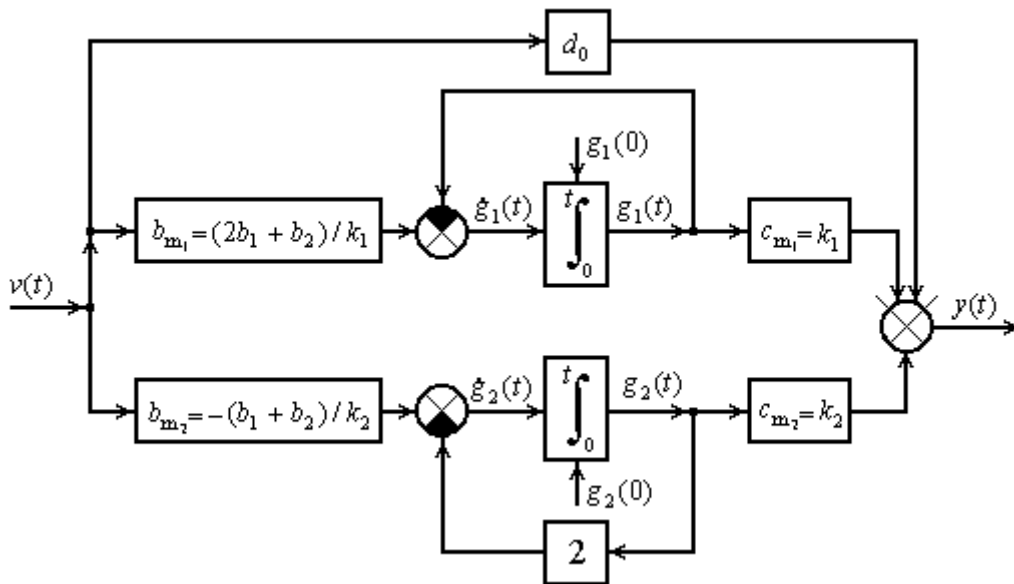


Рисунок 4.4 – Структура преобразованной системы (4.7)

Если система обладает свойством полной управляемости, то  $b_{m_1} \neq 0$  и  $b_{m_2} \neq 0$ , или:

$$2b_1 + b_2 \neq 0 \text{ и } b_1 + b_2 \neq 0.$$

Поскольку система всегда обладает свойством полной наблюдаемости,  $c_{m_1} = k_1 \neq 0$  и  $c_{m_2} = k_2 \neq 0$ .

**Пример 4.2.2.1** Допустим, в системе (4.9)  $\alpha_1 = 3$ ,  $\alpha_0 = 2$ ,  $\beta_2 = 1$ ,  $\beta_1 = 5$ ,  $\beta_0 = 12$ .

Тогда в стандартной форме система имеет следующее описание

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \cdot v, \quad y = [1 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + v, \quad (4.11)$$

где  $x_1 = y - v$ ,  $x_2 = \dot{y} - 2v - \dot{v}$ .

Скалярный вид записи системы:

$$\dot{x}_1 = x_2 + 2v;$$

$$\dot{x}_2 = -2x_1 - 3x_2 + 4v;$$

$$y = x_1 + v.$$

Структурный вид записи:

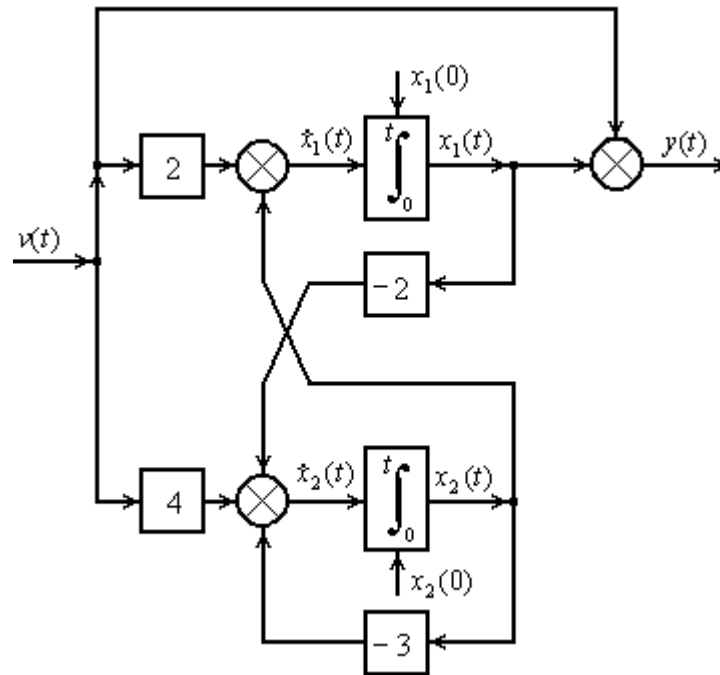


Рисунок 4.5 – Структура системы (4.8)

Система обладает свойством полной наблюдаемости. Система не обладает свойством полной управляемости:

$$\det[\mathbf{b} \quad \mathbf{Ab}] = \alpha_0 b_1^2 + \alpha_1 b_1 b_2 + b_2^2 = -2 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 \cdot 4 + 4^2 = 0.$$

Преобразованием  $\mathbf{x} = \mathbf{M}\mathbf{g}$ ,  $\mathbf{g} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{x}$  приведем систему (4.8) к каноническому виду

$$\begin{bmatrix} \dot{g}_1 \\ \dot{g}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{m_1} \\ b_{m_2} \end{bmatrix} \cdot v, \quad y = \begin{bmatrix} c_{m_1} & c_{m_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} + d_0 v.$$

Для определения собственных чисел  $\lambda_1, \lambda_2$  матрицы  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$  определим характеристический полином

$$\det \begin{bmatrix} 0 - \lambda & 1 \\ -2 & -3 - \lambda \end{bmatrix} = (0 - \lambda) \cdot (-3 - \lambda) - (-2) \cdot 1 = \lambda^2 + 3\lambda + 2.$$

Собственные числа матрицы состояния  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$  (или корни характеристического полинома):  $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$ .

Матрицу канонического преобразования получим на основе матрицы Вандермонда

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \lambda^0 & \lambda^0 \\ \lambda^1 & \lambda^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} \lambda_2 & -1 \\ -\lambda_1 & 1 \end{bmatrix}}{\lambda_2 - \lambda_1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

при этом

$$x_1 = g_1 + g_2; \quad x_2 = -g_1 - 2g_2,$$

$$g_1 = 2x_1 + x_2; \quad g_2 = -x_1 - x_2,$$

$$\begin{bmatrix} b_{m_1} \\ b_{m_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2b_1 - b_2 \\ -b_1 - b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -6 \end{bmatrix},$$

Признаком того, что система не обладает свойством полной управляемости является  $b_{m_1} = 0$ .

$$\begin{bmatrix} c_{m_1} & c_{m_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 - c_2 & c_1 - 2c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Признаком того, что система обладает свойством полной наблюдаемости является:  
 $c_{m_1} = 1 \neq 0$  и  $c_{m_2} = 1 \neq 0$ .

Структура преобразованной системы представлена на рисунке 4.6.

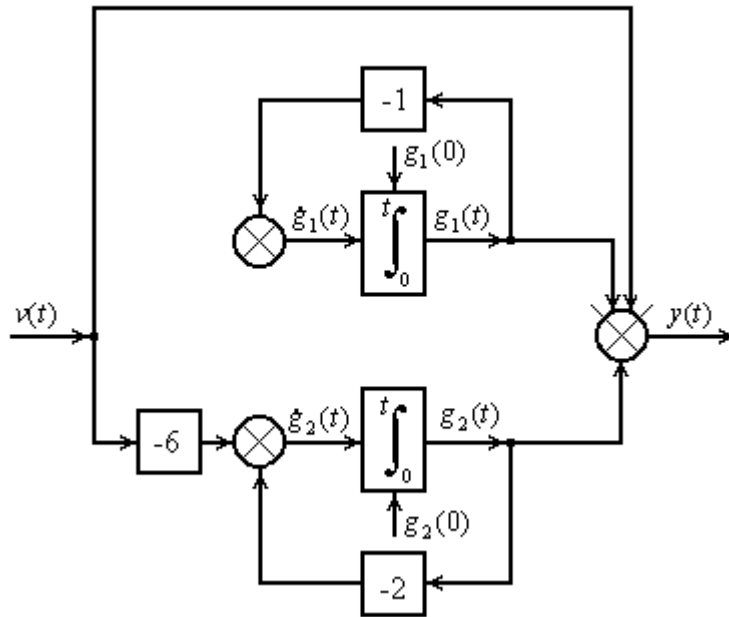


Рисунок 4.6 – Структура преобразованной системы (4.8)

**Пример 4.1.1.2** Преобразуем систему (4.11) с помощью матрицы  $\mathbf{M}$ , полученной на основе  $Adj[\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}]$ . При этом столбцы матрицы  $\mathbf{M}$  будут выбираться пропорционально произвольному столбцу матрицы  $Adj[\mathbf{A} - \lambda_i\mathbf{I}]$ ,  $i = 1, 2$ .

Присоединенная матрица при: а)  $\lambda = \lambda_1$  и б)  $\lambda = \lambda_2$  будет иметь соответственно вид

$$\text{а) } Adj[\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I}] = \begin{bmatrix} -\alpha_1 - \lambda_1 & -1 \\ \alpha_0 & -\lambda_1 \end{bmatrix}, \quad \text{б) } Adj[\mathbf{A} - \lambda_2\mathbf{I}] = \begin{bmatrix} -\alpha_1 - \lambda_2 & -1 \\ \alpha_0 & -\lambda_2 \end{bmatrix}.$$

Выбрав, например, первый столбец матрицы  $\mathbf{M}$  пропорционально первому столбцу матрицы (а), второй – пропорционально второму столбцу матрицы (б), где  $k_1, k_2$  - коэффициенты пропорциональности. В результате получим матрицу канонического преобразования



$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} -k_1(\alpha_1 + \lambda_1) & -k_2 \\ k_1\alpha_0 & -k_2\lambda_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} -k_2\lambda_2 & k_2 \\ -k_1\alpha_0 & -k_1(\alpha_1 + \lambda_1) \end{bmatrix}}{k_1k_2(\lambda_1\lambda_2 + \alpha_1\lambda_2 + \alpha_0)}.$$

Поскольку  $\alpha_0 = 2$ ,  $\alpha_1 = 3$ , при этом корнями характеристического уравнения  $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$  являются  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = -2$  матрица канонического преобразования будет иметь вид

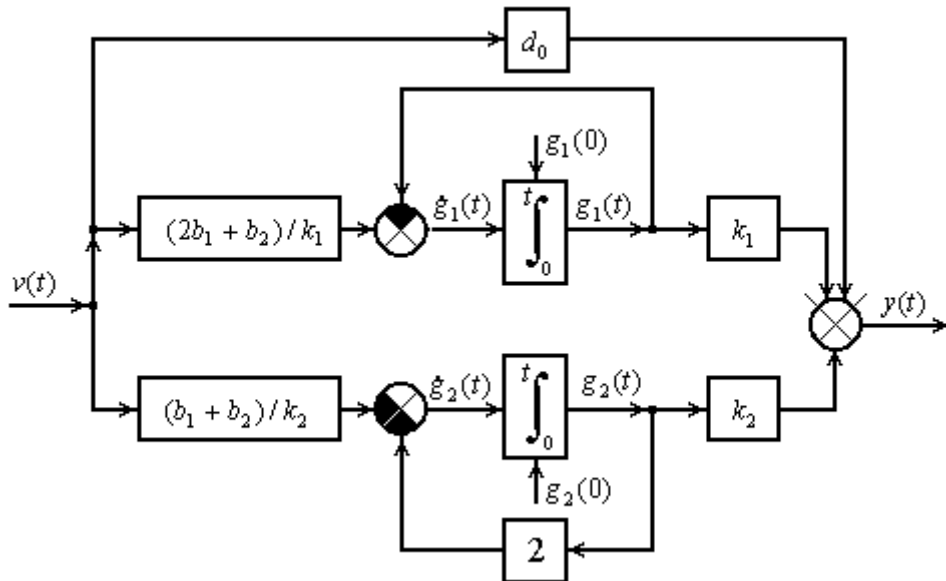
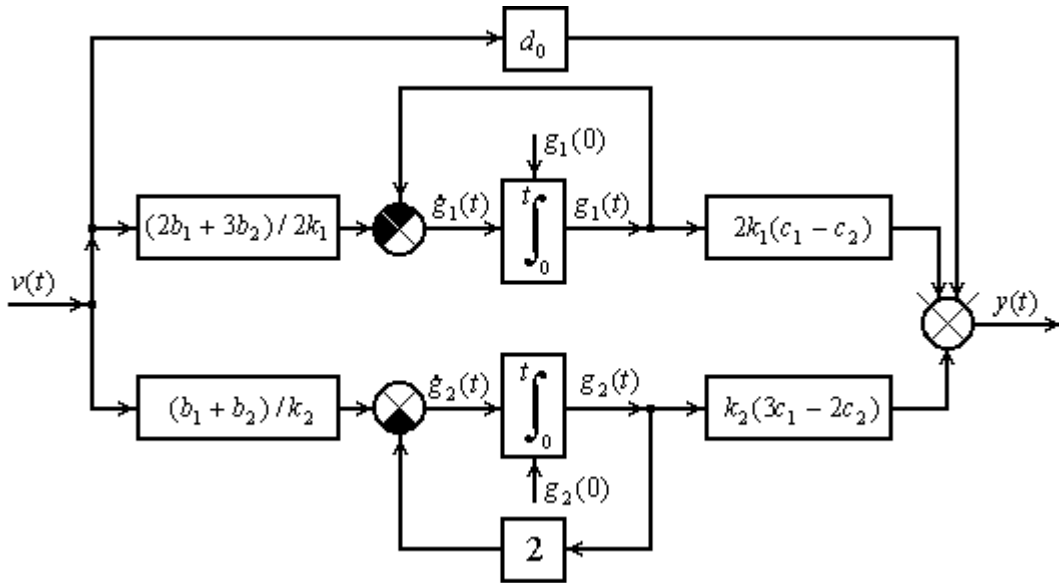
$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} -2k_1 & -k_2 \\ 2k_1 & 2k_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{k_1} & -\frac{1}{2k_1} \\ \frac{1}{k_2} & \frac{1}{k_2} \end{bmatrix}.$$

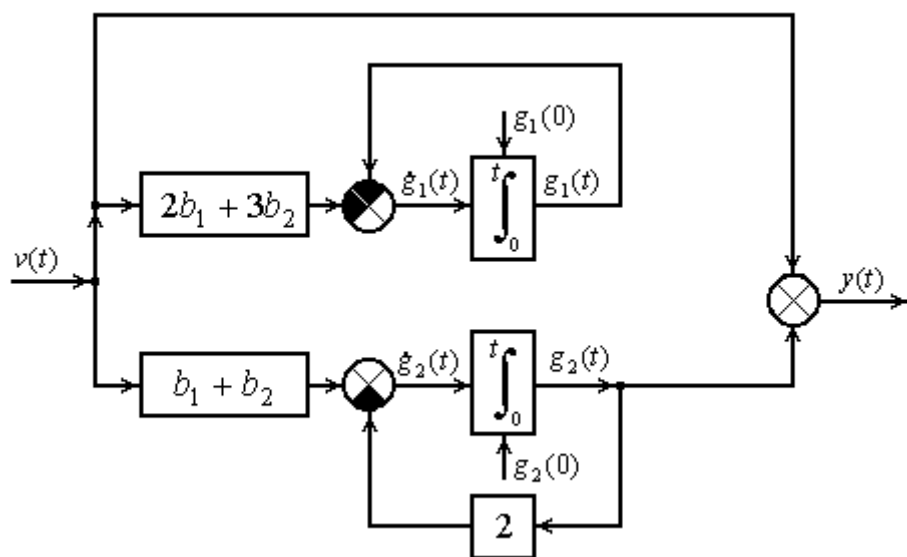
Выбрав  $k_1 = -0.5$ ,  $k_2 = -1$ , получим матрицу канонического преобразования

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix},$$

которая полностью совпадает с матрицей преобразования (4.12), полученной с помощью матрицы Вандермонда.

Архив





**Параметрический синтез нелинейных автоматических систем с сухим трением**

**Параметрический синтез динамических систем с сухим трением**

**Параметрический синтез нелинейных многомерных автоматических систем с сухим трением**

**Параметрический синтез нелинейных многомерных динамических систем с сухим трением**

**Параметрический синтез нелинейных многомерных систем автоматического управления с сухим трением**

**Параметрический синтез нелинейных электромеханических автоматических систем с сухим трением**

**Параметрический синтез нелинейных электромеханических систем автоматического управления с сухим трением**



