««ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ»

(часть 2, лекция 2)

«Приведение уравнений динамики автоматических систем к стандартной форме»

(проф. В.Н.Шамберов)

Среди автоматических систем существует класс одномерных систем. Отличительным признаком одномерных систем является существование в системе одной выходной (регулируемой) переменной и одного управляющего (регулирующего) воздействия.

3.1 Динамика одномерной системы может быть задана следующим описанием:

$$\overset{(n)}{y} + \alpha_{n-1}\overset{(n-1)}{y} + \ldots + \alpha_1 \dot{y} + \alpha_0 y = \beta_m \overset{(m)}{v} + \beta_{n-1}\overset{(m-1)}{v} + \ldots + \beta_1 \dot{v} + \beta_0 v. \qquad (3.1)$$

Система (3.1) описывается обыкновенным дифференциальным уравнением n - го порядка с правой частью m - го порядка, где $n = 0,1,2,3\ldots$, $m = 0,1,2,3,\ldots$, (при этом: $n \geq m$) и может быть приведена к стандартному виду:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}v; \quad y = \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle + d_0 v\ , \qquad (3.2)$$

где $\mathbf{x}$ - вектор состояния системы в n – мерном фазовом пространстве; $\mathbf{A}$ - квадратная ($n \times n$) действительная матрица вида (3.3); $\mathbf{b}$ - действительная матрица размерности ($n \times 1$) вида (3.4); $\mathbf{c}$ - действительная ($1 \times n$) матрица вида (3.4); v - скалярная переменная (управляющее) воздействие; y - скалярная переменная (регулируемая величина); d_0 - вещественный коэффициент.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \ldots & -\alpha_{n-2} & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}. \qquad (3.3)$$

Движения в системе возникают как от управляющего воздействия v, так и от ненулевых начальных условий (отклонений) $y(0),\ \dot{y}(0),\ \ddot{y}(0),\ \ldots,\ \overset{(n-1)}{y}(0)$.

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \ldots \\ b_\mathrm{m} \end{bmatrix};\ \mathbf{c} = [1 \quad 0 \quad 0 \quad \ldots \quad 0]. \tag{3.4}$$

Система (3.1) всегда полностью наблюдаемая, для полной управляемости должно выполняться условие

$$\det[\mathbf{b} \quad \mathbf{Ab} \quad \mathbf{A^2b} \quad \ldots \quad \mathbf{A^{n-1}b}] \neq 0.$$

В описании (3.2) составляющие $x_1,\ x_2,\ldots,\ x_n$ вектора $\mathbf{x}$ определяются в соответствии со следующими выражениями

а) при $n - m = 0$ (представлено на рисунке 3.1):

$$\begin{aligned}
x_1 &= y - d_0 v; \\
x_2 &= \dot{y} - b_1 v - d_0 \dot{v}; \\
x_3 &= \ddot{y} - b_2 v - b_1 \dot{v} - d_0 \ddot{v}; \\
x_4 &= \dddot{y} - b_3 v - b_2 \dot{v} - b_1 \ddot{v} - d_0 \dddot{v}; \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \\
x_{n-2} &= \overset{(n-3)}{y} - b_{n-3} v - b_{n-4} \dot{v} - \ldots - b_2 \overset{(m-5)}{v} - b_1 \overset{(m-4)}{v} - d_0 \overset{(m-3)}{v}; \\
x_{n-1} &= \overset{(n-2)}{y} - b_{n-2} v - b_{n-3} \dot{v} - \ldots - b_2 \overset{(m-4)}{v} - b_1 \overset{(m-3)}{v} - d_0 \overset{(m-2)}{v}; \\
x_n &= \overset{(n-1)}{y} - b_{n-1} v - b_{n-2} \dot{v} - \ldots - b_2 \overset{(m-3)}{v} - b_1 \overset{(m-2)}{v} - d_0 \overset{(m-1)}{v},
\end{aligned} \tag{3.5}$$

б) при $n - m > 0$ (представлено на рисунках 3.2 - 3.5):

$$
\begin{aligned}
x_1 &= y;\\
x_2 &= \dot{y};\\
x_3 &= \ddot{y};\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;\\
x_{n-m} &= \overset{(n-m-1)}{y};\\
x_{n-m+1} &= \overset{(n-m)}{y} - b_{n-m}v;\\
x_{n-m+2} &= \overset{(n-m+1)}{y} - b_{n-m+1}v - b_{n-m}\dot{v};\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;\\
x_{n-2} &= \overset{(n-3)}{y} - b_{n-3}v - b_{n-4}\dot{v} - \ldots - b_1\overset{(m-3)}{v};\\
x_{n-1} &= \overset{(n-2)}{y} - b_{n-2}v - b_{n-3}\dot{v} - \ldots - b_1\overset{(m-2)}{v};\\
x_n &= \overset{(n-1)}{y} - b_{n-1}v - b_{n-2}\dot{v} - \ldots - b_1\overset{(m-1)}{v}.
\end{aligned}
\qquad (3.6)
$$

Коэффициенты $b_1, b_2, b_3\ \ldots, b_n$ в (3.4) и d_0 в (3.2) определяются через коэффициенты $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, \beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_m$ согласно выражениям:

а) при $n-m=0$

$$
\begin{bmatrix} d_0\\ b_1\\ b_2\\ b_3\\ \ldots\\ b_{n-1}\\ b_n \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0\\
\alpha_{n-1} & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0\\
\alpha_{n-2} & \alpha_{n-1} & 1 & \ldots & 0 & 0\\
\alpha_{n-3} & \alpha_{n-2} & \alpha_{n-1} & \ldots & 0 & 0\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \ldots & 1 & 0\\
\alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_{n-1} & 1
\end{bmatrix}^{-1}
\times
\begin{bmatrix} \beta_m\\ \beta_{m-1}\\ \beta_{m-2}\\ \beta_{m-3}\\ \ldots\\ \beta_1\\ \beta_0 \end{bmatrix};
\qquad (3.7)
$$

б) при $n-m>0$ $d_0=0;\ b_1=0;\ b_2=0;\ldots,b_{n-m-1}=0;$

$$\begin{bmatrix} b_{n-m} \\ b_{n-m+1} \\ b_{n-m+2} \\ b_{n-m+3} \\ \dots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \alpha_{n-1} & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \alpha_{n-2} & \alpha_{n-1} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \alpha_{n-3} & \alpha_{n-2} & \alpha_{n-1} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n-m+1} & \alpha_{n-m+2} & \alpha_{n-m+3} & \dots & 1 & 0 \\ \alpha_{n-m} & \alpha_{n-m+1} & \alpha_{n-m+2} & \dots & \alpha_{n-1} & 1 \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} \beta_m \\ \beta_{m-1} \\ \beta_{m-2} \\ \beta_{m-3} \\ \dots \\ \beta_1 \\ \beta_0 \end{bmatrix}. \qquad (3.8)$$

В структурном виде приведенная к стандартной форме система (3.1) представлена на рисунках 3.0-а – 3.0-в.

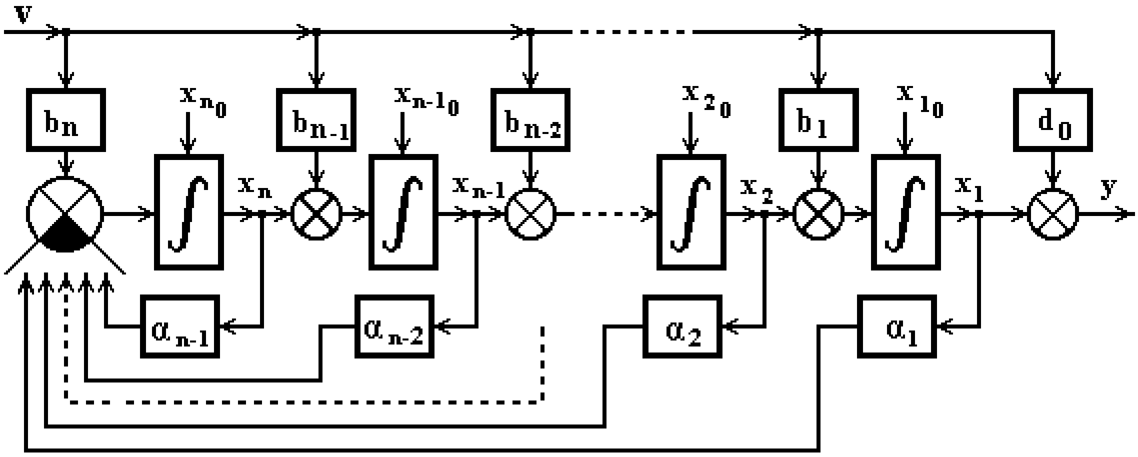

Рисунок 3.0-а – Структура преобразованной системы при $n-m=0$

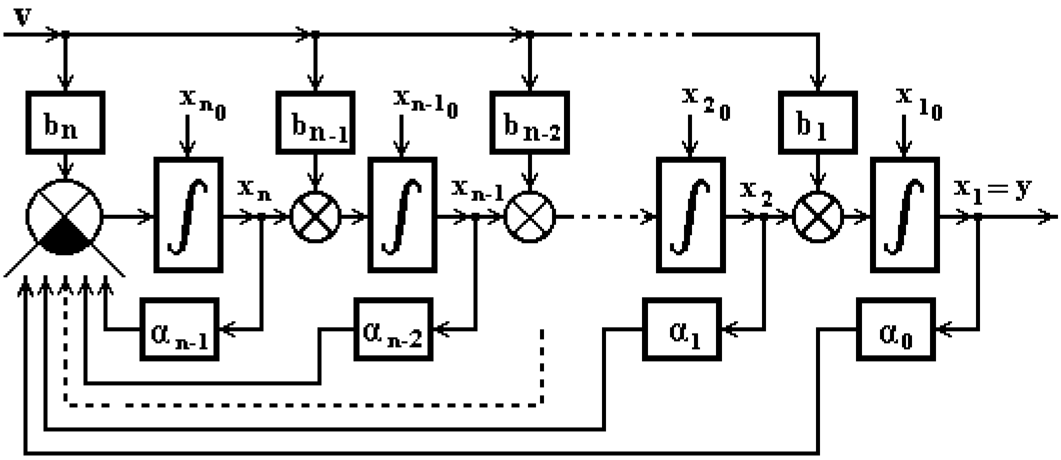

Рисунок 3.0-б – Структура преобразованной системы при $n-m=1$

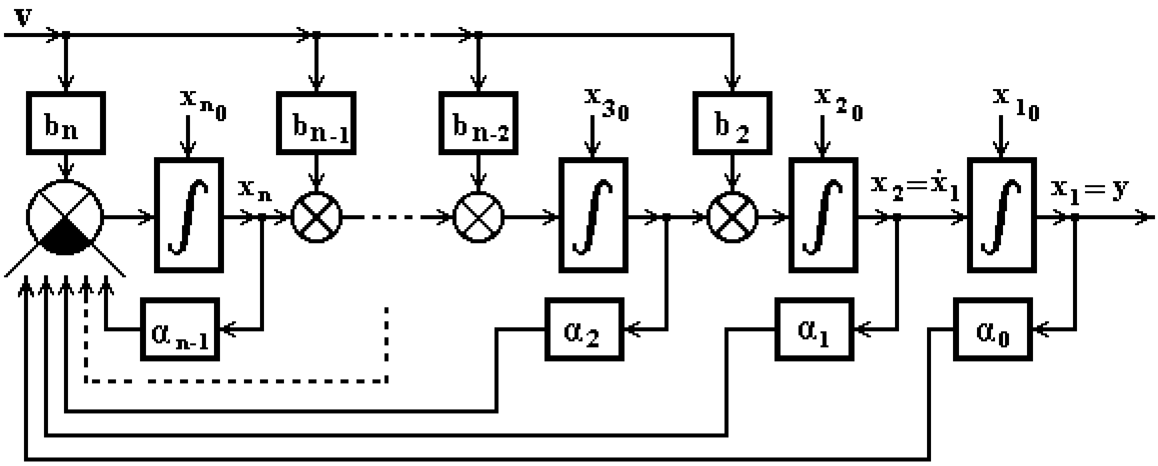

Рисунок 3.0-в – Структура преобразованной системы при $n-m=2$

Пример 1. Рассмотрим систему (3.1) при $n=3$ и $m=3$, которая в этом случае будет иметь вид

$$\dddot{y}+\alpha_2\ddot{y}+\alpha_1\dot{y}+\alpha_0 y=\beta_3\dddot{v}+\beta_2\ddot{v}+\beta_1\dot{v}+\beta_0 v. \qquad (3.9)$$

Система (3.9) может быть приведена к стандартному виду (3.2), при этом

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_3\end{bmatrix},\ \mathbf{b}=\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{bmatrix},\ \mathbf{c}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}. \qquad (3.10)$$

Составляющие вектора $\mathbf{x}$ в соответствии с (3.5) определяются как

$$x_1=y-d_0 v;\quad x_2=\dot{y}-b_1 v-d_0\dot{v};\quad x_3=\ddot{y}-b_2 v-b_1\dot{v}-d_0\ddot{v}. \qquad (3.11)$$

Коэффициенты матрицы $\mathbf{b}$ и коэффициент d_0 в (3.11) в соответствии с (3.7) определяются согласно выражению

$$\begin{bmatrix} d_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_2 & 1 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & 1 & 0 \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} \beta_3 \\ \beta_2 \\ \beta_1 \\ \beta_0 \end{bmatrix}. \qquad (3.12)$$

Структура системы (3.9) в преобразованном виде представлена на рисунке 3.4

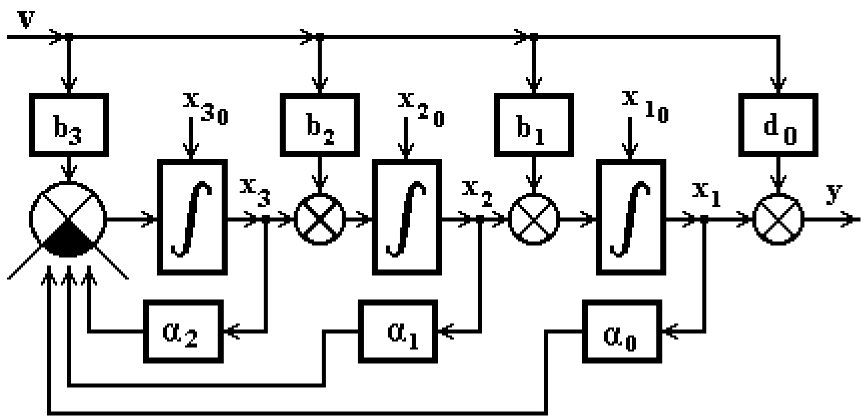

Рисунок 3.1 – Структура преобразованной системы при $n=3$ $m=3$

Пример 2. Система (3.1) при $n=3$ и $m=2$ будет иметь вид

$$\dddot{y} + \alpha_2 \ddot{y} + \alpha_1 \dot{y} + \alpha_0 y = \beta_2 \ddot{v} + \beta_1 \dot{v} + \beta_0 v. \qquad (3.13)$$

Система может быть приведена к виду (3.2), при этом

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_3 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}, \ \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ d_0 = 0. \qquad (3.14)$$

Составляющие вектора $\mathbf{x}$ в соответствии с (3.6) определяются как

$$x_1 = y; \ x_2 = \dot{y} - b_1 v; \ x_3 = \ddot{y} - b_2 v - b_1 \dot{v}. \qquad (3.15)$$

Коэффициенты матрицы $\mathbf{b}$ в (3.14) в соответствии с (3.8) определяются согласно выражению

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha_2 & 1 & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} \beta_2 \\ \beta_1 \\ \beta_0 \end{bmatrix}. \qquad (3.16)$$

Структура системы (3.13) в преобразованном виде представлена на рисунке 3.2

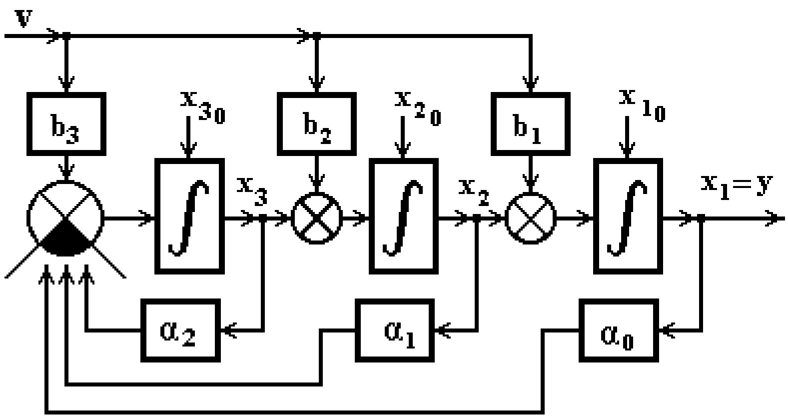

Рисунок 3.2 – Структура преобразованной системы при $n=3$ $m=2$

Пример 3. Система (2.1) при $n=3$ и $m=1$ будет иметь вид

$$\dddot{y} + \alpha_2 \ddot{y} + \alpha_1 \dot{y} + \alpha_0 y = \beta_1 \dot{v} + \beta_0 v. \qquad (3.17)$$

Система может быть приведена к виду (3.2), при этом

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_3 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}, \ \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ d_0 = 0. \qquad (3.18)$$

Составляющие вектора $\mathbf{x}$ в соответствии с (3.6) определяются как

$$x_1 = y; \ x_2 = \dot{y}; \ x_3 = \ddot{y} - b_2 v. \qquad (3.19)$$

Коэффициенты матрицы $\mathbf{b}$ в (3.14) в соответствии с (3.8) определяются согласно выражению

$$\begin{bmatrix} b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \alpha_3 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_0 \end{bmatrix}. \tag{3.20}$$

Структура системы (3.17) в преобразованном виде представлена на рисунке 3.3

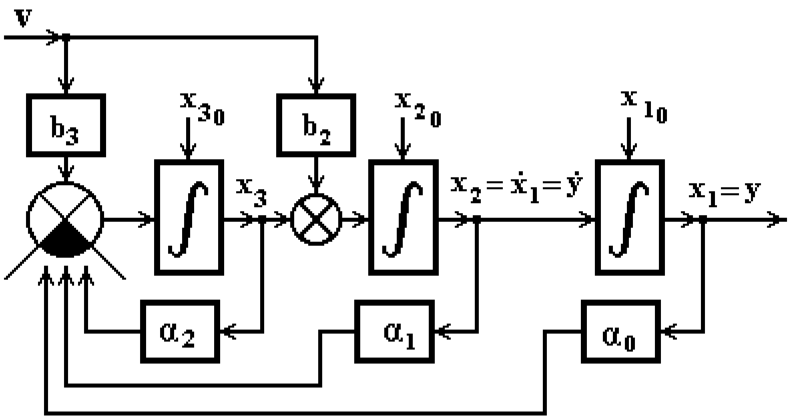

Рисунок 3.3 – Структура преобразованной системы при $n=3$ $m=1$

Пример 4. Система (3.1) при $n=3$ и $m=0$ будет иметь вид

$$\dddot{y} + \alpha_2 \ddot{y} + \alpha_1 \dot{y} + \alpha_0 y = \beta_0 v. \tag{3.21}$$

Система (3.21) может быть приведена к виду (3.2), при этом

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_3 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_3 \end{bmatrix}, \ \mathbf{c} = [1 \quad 0 \quad 0], \ d_0 = 0. \tag{3.22}$$

Составляющие вектора $\mathbf{x}$ в соответствии с (3.6) определяются как

$$x_1 = y; \ x_2 = \dot{y}; \ x_3 = \ddot{y}. \tag{3.23}$$

Коэффициенты матрицы $\mathbf{b}$ в (3.14) в соответствии с (3.8) определяются согласно выражению

$$[b_3] = [1]^{-1} \times [\beta_0], \text{ или } b_3 = \beta_0. \qquad (3.24)$$

Структура системы (3.21) в преобразованном виде представлена на рисунке 3.4

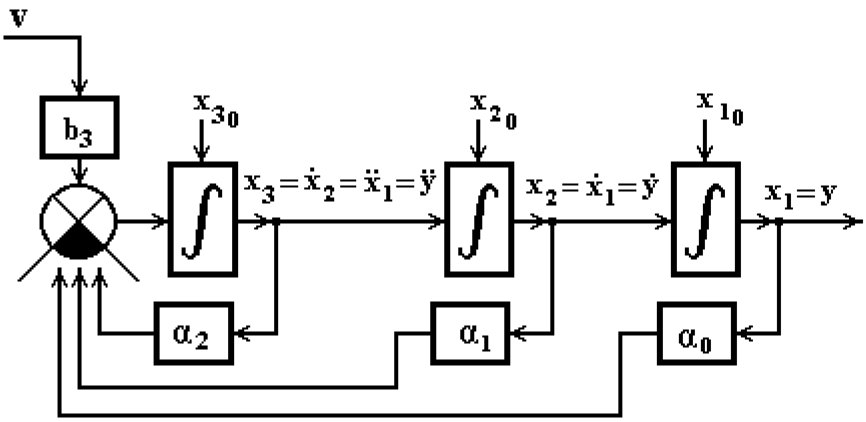

Рисунок 3.4 – Структура преобразованной системы при $n=3$ и $m=0$

Пример 5. Система (3.1) при $n=3$, $m=0$ и $\beta_0=0$ будет иметь вид

$$\dddot{y} + \alpha_2 \ddot{y} + \alpha_1 \dot{y} + \alpha_0 y = 0. \qquad (3.25)$$

Система может быть приведена к виду (3.2), при этом

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_3 \end{bmatrix}, \ \mathbf{c} = [1 \quad 0 \quad 0], \ d_0 = 0. \qquad (3.26)$$

Составляющие вектора $\mathbf{x}$ в соответствии с (3.6) определяются как

$$x_1 = y; \ x_2 = \dot{y}; \ x_3 = \ddot{y}. \qquad (3.27)$$

Структура системы (3.25) в преобразованном виде представлена на рисунке 3.10

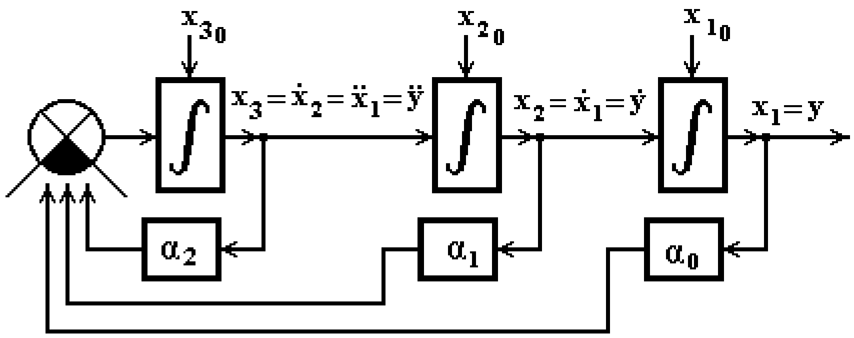

Рисунок 3.5 – Структура преобразованной системы при $n = 3$, $m = 0$ и $\beta_0 = 0$

Пример 6. Система (3.1) при $n = 2$ и $m = 2$ будет иметь вид

$$\ddot{y} + \alpha_1 \dot{y} + \alpha_0 y = \beta_2 \ddot{v} + \beta_1 \dot{v} + \beta_0 v. \tag{3.28}$$

После приведения к виду (3.2) система (3.28) будет иметь следующую структуру (представлено на рисунке 3.6)

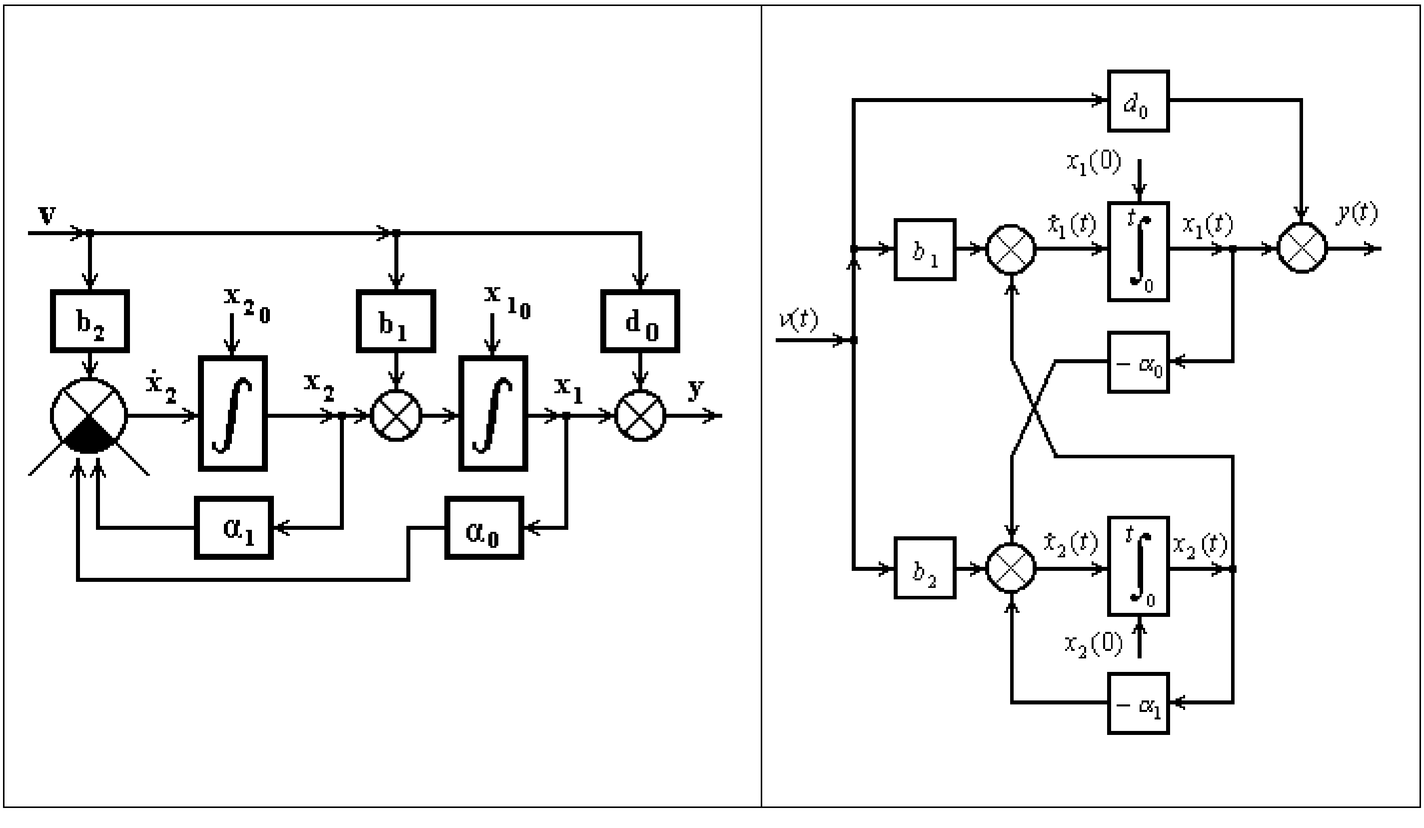

Рисунок 3.6 – Структура преобразованной системы (3.28)

Для преобразованной системы (3.28) коэффициенты b_1, b_2, d_0 согласно выражению (3.7) определяются как

$$\begin{bmatrix} d_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & 1 & 0 \\ \alpha_0 & \alpha_1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} \beta_2 \\ \beta_1 \\ \beta_0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & 1 & 0 \\ \alpha_0 & \alpha_1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = Adj \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & 1 & 0 \\ \alpha_0 & \alpha_1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{bmatrix}$$

$$C_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \alpha_1 & 1 \end{vmatrix} = 1;\ C_{12} = -\begin{vmatrix} \alpha_1 & 0 \\ \alpha_0 & 1 \end{vmatrix} = -\alpha_1;\ C_{13} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & 1 \\ \alpha_0 & \alpha_1 \end{vmatrix} = \alpha_1^2 - \alpha_0;$$

$$C_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ \alpha_1 & 1 \end{vmatrix} = 0;\ C_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \alpha_0 & 1 \end{vmatrix} = 1;\ C_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \alpha_0 & \alpha_1 \end{vmatrix} = -\alpha_1;$$

$$C_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0;\ C_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \beta_1 & 0 \end{vmatrix} = 0;\ C_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \alpha_1 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & 1 & 0 \\ \alpha_0 & \alpha_1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\alpha_1 & 1 & 0 \\ \alpha_1^2 - \alpha_0 & -\alpha_1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} d_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\alpha_1 & 1 & 0 \\ \alpha_1^2 - \alpha_0 & -\alpha_1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \beta_2 \\ \beta_1 \\ \beta_0 \end{bmatrix}.$$

$$d_0 = \beta_2;\ b_1 = -\alpha_1\beta_2 + \beta_1;\ b_2 = (\alpha_1^2 - \alpha_0)\beta_2 - \alpha_1\beta_1 + \beta_0. \qquad (3.29)$$

Условие полной управляемости системы (3.28)

$$\alpha_0 b_1^2 + \alpha_1 b_1 b_2 + b_2^2 \neq 0. \tag{3.30}$$

Пример 7. Система (3.1) при $n = 2$ и $m = 1$ будет иметь вид

$$\ddot{y} + \alpha_1 \dot{y} + \alpha_0 y = \beta_1 \dot{v} + \beta_0 v. \tag{3.31}$$

После приведения к виду (3.2) система (3.31) будет иметь следующую структуру (представлено на рисунке 3.7)

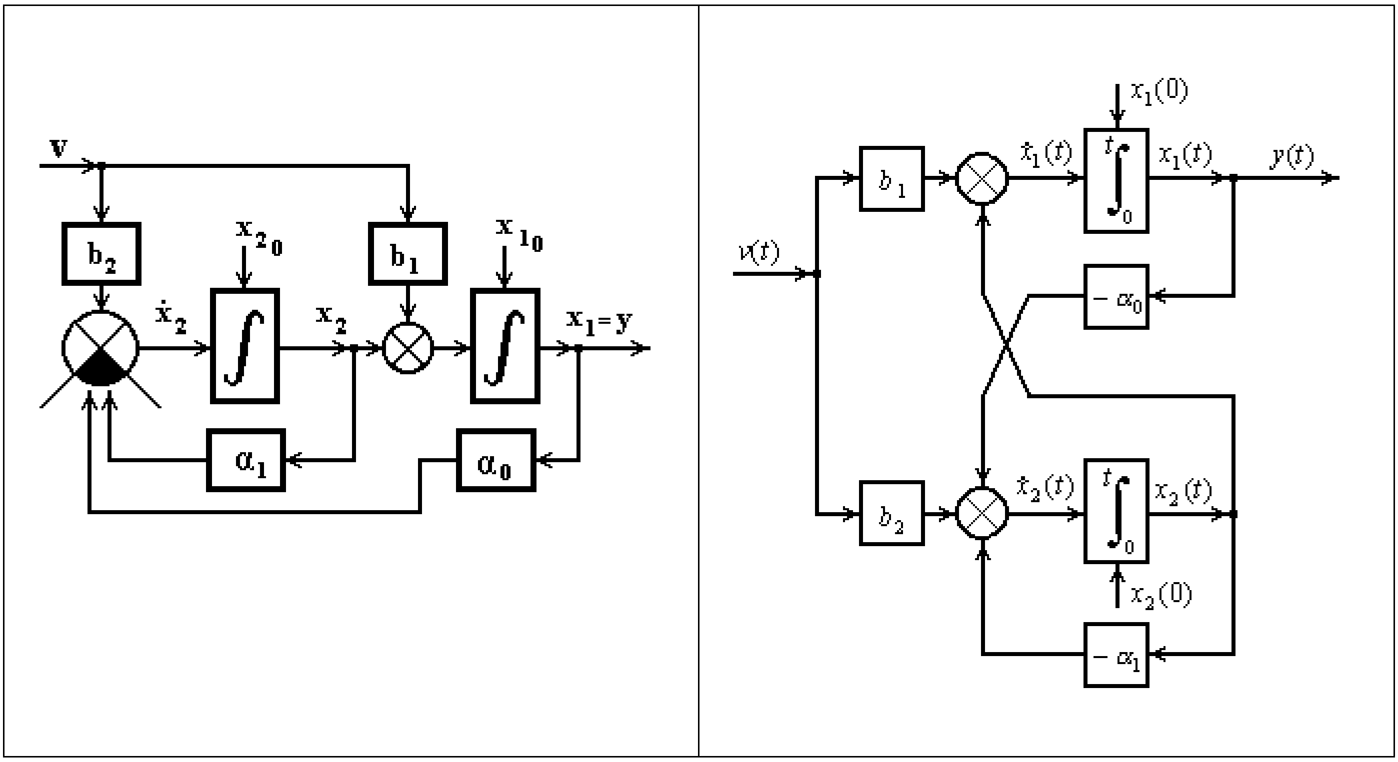

Рисунок 3.7 – Структура преобразованной системы (3.31)

Для преобразованной системы (3.31) коэффициенты b_1, b_2 согласно выражению (3.7) определяются как $d_0 = 0$, $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \alpha_1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_0 \end{bmatrix}$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \alpha_1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = Adj \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \alpha_1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} \\ C_{12} & C_{22} \end{bmatrix}$$

$$C_{11} = 1;\ C_{12} = -\alpha_1;\ C_{21} = 0;\ C_{22} = 1.$$

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha_1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_0 \end{bmatrix}$$

$$b_1 = \beta_1;\ b_2 = -\alpha_1\beta_1 + \beta_0. \qquad (3.32)$$

Условие полной управляемости системы (3.31)

$$\alpha_0 b_1^2 + \alpha_1 b_1 b_2 + b_2^2 \neq 0. \qquad (3.33)$$

Пример 7. Система (3.1) при $n = 2$ и $m = 0$ будет иметь вид

$$\ddot{y} + \alpha_1 \dot{y} + \alpha_0 y = \beta_0 v. \qquad (3.34)$$

После приведения к виду (3.2) система (3.34) будет иметь следующую структуру (представлено на рисунке 3.8)

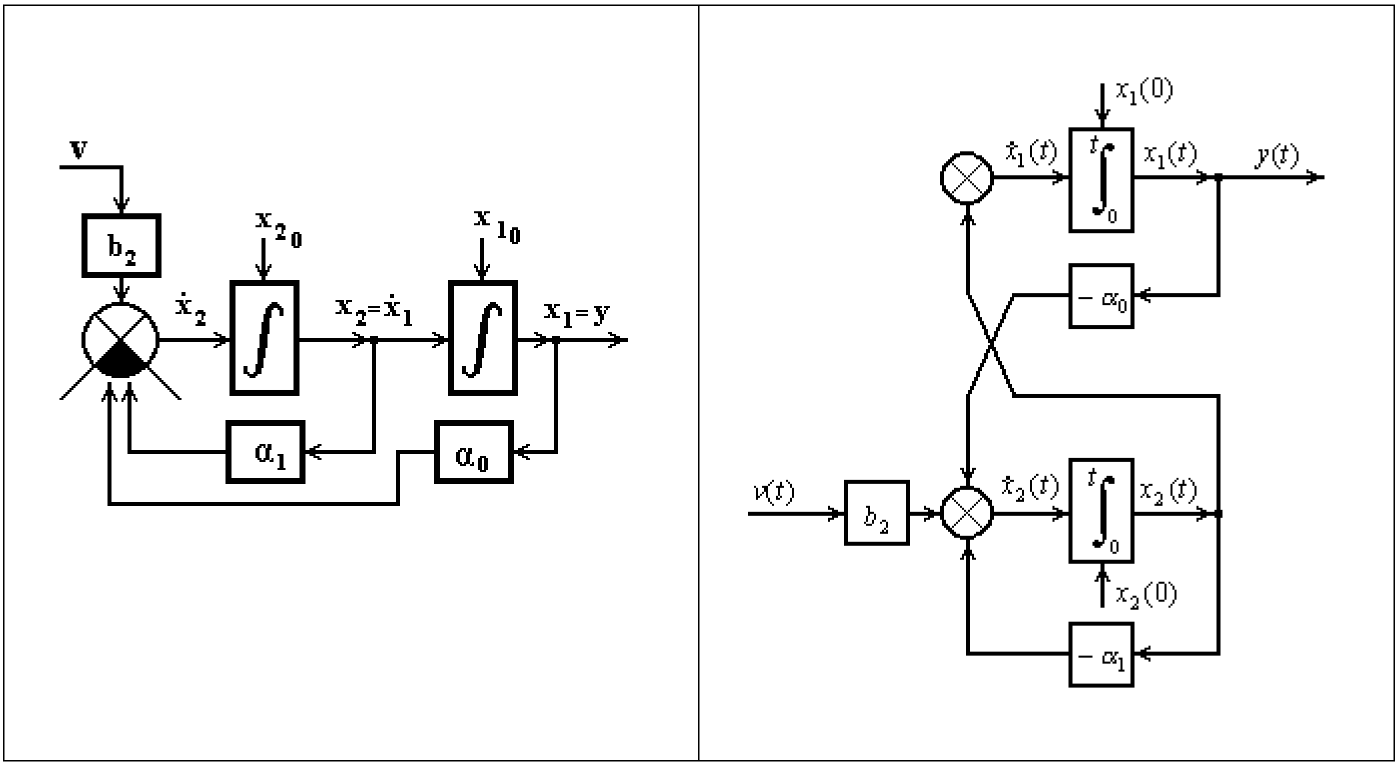

Рисунок 3.8 – Структура преобразованной системы (3.34)

Для преобразованной системы (3.34) $d_0 = 0$, $b_1 = 0$, а коэффициент b_2 определяется согласно выражению (3.7) как

$$b_2 = \beta_0. \tag{3.35}$$

Система (3.34) всегда полностью управляема.

Пример 8. Система (3.1) при $n = 2$, $m = 0$ и $\beta_0 = 0$ будет иметь вид

$$\ddot{y} + \alpha_1 \dot{y} + \alpha_0 y = 0. \tag{3.36}$$

После приведения к виду (3.2) система (3.36) будет иметь следующую структуру (представлено на рисунке 3.9)

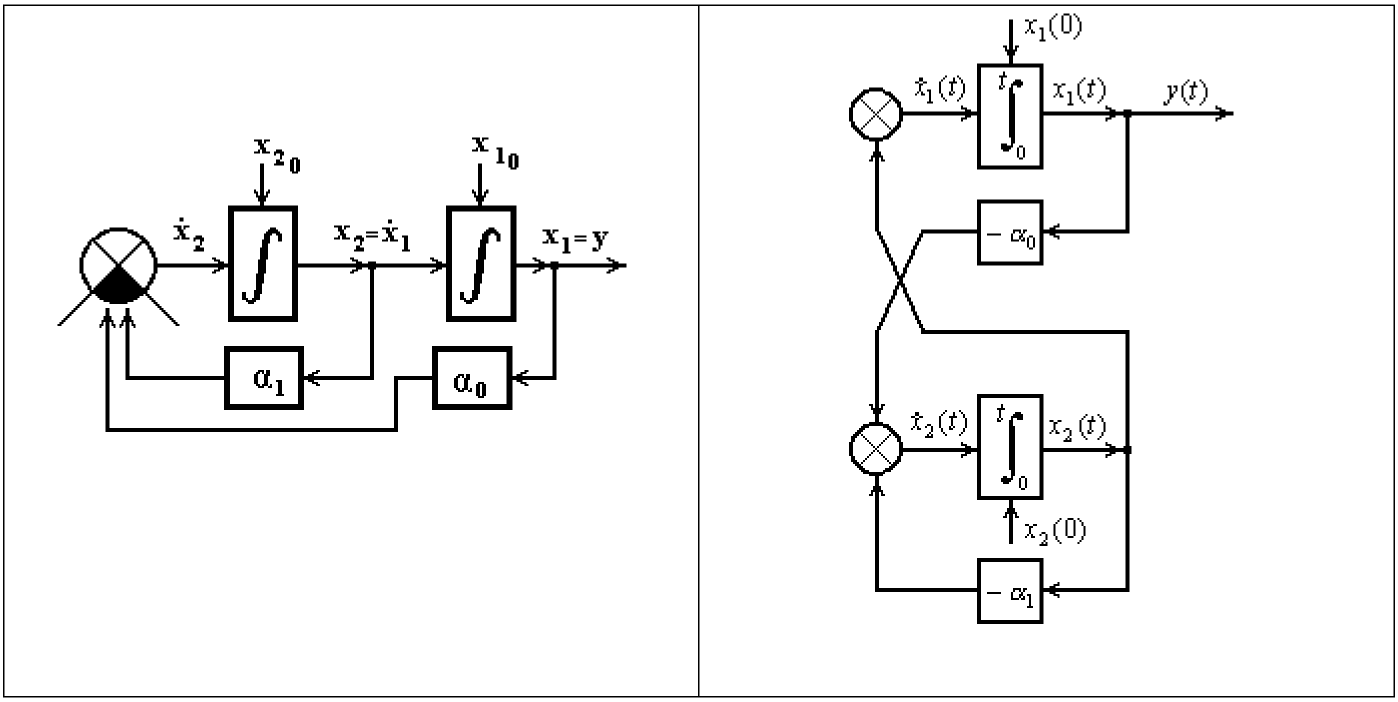

Рисунок 3.9 – Структура преобразованной системы (3.36)

К системе (3.36) понятие управляемости неприменимо. Поскольку отсутствует управляющее воздействие.