«ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ»

(часть 2, лекция 1)

Многомерные системы. Основные понятия и определения. Устойчивость. Управляемость. Наблюдаемость

(проф. В.Н.Шамберов)

1.1 Основные понятия и определения.

Теория автоматического управления – раздел технической кибернетики, объектом исследования которого являются системы автоматического управления (САУ) различной природы и степени сложности. Теория автоматического управления (ТАУ) разрабатывает принципы построения систем управления и изучает основные закономерности протекающих в них процессов. ТАУ является одной из научных и методологических основ, на базе которых целенаправленно объединяются усилия специалистов различного профиля, участвующих в создании современных сложных САУ. При изучении процессов управления ТАУ абстрагируется от природы и конструктивных особенностей составных частей САУ. Вместо реальных объектов в ТАУ рассматриваются их адекватные математические модели – динамические системы.

Система автоматического управления (регулирования) - комплекс устройств, обеспечивающих автоматическое изменение (стабилизацию) координат объекта управления с целью установления желаемого режима работы объекта.

Модель математическая – система математических соотношений, описывающих изучаемый процесс или явление. Для составления математической модели (ММ) можно использовать любые математические средства, при этом процесс составления ММ называется математическим моделированием. Это самый общий и наиболее употребляемый в науке, в частности в кибернетике и автоматике, метод исследования.

Система динамическая – под динамическими системами понимаются системы различной природы – механические, электрические, биологические и др., процессы в которых отображаются, в основном, дифференциальными уравнениями.

Одномерные системы автоматического управления **–** автоматические системы, у которых одна управляемая величина (координата) и одно управляющее воздействие.

Многомерные (многосвязные) системы автоматического управления **-** автоматические системы, у которых число, как управляемых координат, так и управляющих воздействий равно двум и более. Специфика таких систем заключается в том, что поведение каждой управляемой координатой определяется всей совокупностью управляющих воздействий, образующих вектор управления, а также вектором возмущающих воздействий. Необходимость в создании таких систем возникает в тех случаях, когда требуется управлять одновременно несколькими взаимосвязанными параметрами некоторого физического процесса.

1.2 Описание автоматических систем. Линейные автоматические системы могут иметь следующие описания (математические модели).

1.2.1 Автономная система. Математическое описание автономной системы в общем виде следующее

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \text{ с начальными условиями } \mathbf{x}(0) = \mathbf{x_0}. \tag{1.1}$$

В развернутом виде описание системы (1.1) следующее

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}. \tag{1.2}$$

В скалярном виде описание системы (1.1) следующее

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n; \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n; \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots; \\ \dot{x}_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Свойства системы определяются ее устойчивостью. Структура системы представлена на рисунке 1.

1.2.2 Автономная система, находящаяся под наблюдением

1.2.2.1 (SO - singl-output). Математическое описание системы в общем виде следующее

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x},\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x_0},\ y = \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle. \tag{1.4}$$

В развернутом виде описание системы (1.4) следующее

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}; \; y = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}. \tag{1.5}$$

В скалярном виде описание системы (1.4) следующее

$$\begin{aligned} &\dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n; \\ &\dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n; \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots; \\ &\dot{x}_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n; \end{aligned} \tag{1.6}$$

$$y = c_1x_1 + c_2x_1 + \dots + c_nx_n.$$

Помимо устойчивости для данной системы существует такое понятие, как свойство полной наблюдаемости. Структура системы представлена на рисунке 2.

1.2.2.2 (MO - multi-output). Математическое описание системы в общем виде следующее

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x},\; \mathbf{x}(0) = \mathbf{x_0},\; \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}. \tag{1.7}$$

В развернутом виде описание системы (1.7) следующее

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{k1} & c_{k2} & \dots & c_{kn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}. \tag{1.8}$$

В скалярном виде описание системы (1.7) следующее

$$\begin{aligned} &\dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n; && y_1 = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1n}x_n; \\ &\dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n; && y_2 = c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \ldots + c_{2n}x_n; \\ &\qquad\qquad \ldots && \qquad\qquad \ldots \\ &\dot{x}_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n; && y_k = c_{k1}x_1 + c_{k2}x_2 + \ldots + c_{kn}x_n. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Помимо устойчивости для данной системы существует такое понятие, как свойство полной наблюдаемости. Структура системы представлена на рисунке 3.

1.2.2 Автоматическая система, находящаяся под управлением

1.2.3.1 (SI - singl-input). Математическое описание системы в общем виде следующее

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}v, \mathbf{x}(0) = \mathbf{x_0}. \tag{1.10}$$

В развернутом виде описание системы (1.10) следующее

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \ldots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{bmatrix} \times v. \tag{1.11}$$

В скалярном виде описание системы (1.10) следующее

$$\begin{aligned} &\dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + b_1 v; \\ &\dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + b_2; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \\ &\dot{x}_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n + b_n v. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Помимо устойчивости для данной системы существует такое понятие, как свойство полной управляемости. Структура системы представлена на рисунке 4.

1.2.3.2 (MI - multi-input). Математическое описание системы в общем виде следующее

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{v}, \mathbf{x}(0) = \mathbf{x_0}. \tag{1.13}$$

В развернутом виде описание системы (1.13) следующее

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nr} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_r \end{bmatrix}. \tag{1.14}$$

В скалярном виде описание системы (1.13) следующее

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + b_{11}v_1 + b_{12}v_2 + \dots + b_{1r}v_r; \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + b_{21}v_1 + b_{22}v_2 + \dots + b_{2r}v_r; \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots; \\ \dot{x}_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + b_{n1}v_1 + b_{n2}v_2 + \dots + b_{nr}v_r. \end{aligned} \tag{1.15}$$

Помимо устойчивости для данной системы существует такое понятие, как свойство полной управляемости. Структура системы представлена на рисунке 5.

1.2.4 Автоматическая система, находящаяся под управлением и наблюдением

1.2.4.1 (SISO - singl-input-singl-output) без сигнала обхода. Математическое описание системы в общем виде следующее

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}v,\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x_0},\ \ y = \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle. \tag{1.16}$$

В развернутом виде описание системы (1.16) следующее

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} \times v; \; y = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}. \quad (1.17)$$

В скалярном виде описание системы (1.16) следующее

$$\begin{aligned} &\dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + b_1 v; \\ &\dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + b_2 v; \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots; \\ &\dot{x}_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + b_n v; \\ & \\ &y = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Помимо устойчивости для данной системы существуют такие понятия, как свойство полной управляемости и свойство полной наблюдаемости. Структура системы представлена на рисунке 6.

1.2.4.2 (SISO - singl-input-singl-output) с сигналом обхода. Математическое описание системы в общем виде следующее

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}v, \; \mathbf{x}(0) = \mathbf{x_0}, \;\; y = \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle + d_0 v. \quad (1.19)$$

В развернутом виде описание системы (1.19) следующее

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} \times v;$$

(1.20)

$$y = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} + d_0 \times v.$$

В скалярном виде описание системы (1.19) следующее

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + b_1 v; \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + b_2 v; \\ &\dots \\ \dot{x}_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n + b_n v; \end{aligned} \qquad (1.21)$$

$$y = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n + d_0 v.$$

Помимо устойчивости для данной системы существуют такие понятия, как свойство полной управляемости и свойство полной наблюдаемости. Структура системы представлена на рисунке 7.

1.2.4.3 (SIMO - singl-input-multi-output). Математическое описание системы в общем виде следующее

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}v,\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x_0},\ \ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}. \qquad (1.22)$$

В развернутом виде описание системы (1.22) следующее

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} \times v;$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{11} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{k1} & c_{k2} & \dots & c_{kn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}. \qquad (1.23)$$

В скалярном виде описание системы (1.22) следующее

$$\begin{aligned} &\dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + b_1 v; \\ &\dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + b_2 v; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \\ &\dot{x}_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n + b_n v; \\ \\ &y_1 = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1n}x_n; \\ &y_2 = c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \ldots + c_{2n}x_n; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \\ &y_k = c_{k1}x_1 + c_{k2}x_2 + \ldots + c_{kn}x_n. \end{aligned} \qquad (1.24)$$

Помимо устойчивости для данной системы существуют такие понятия, как свойство полной управляемости и свойство полной наблюдаемости. Структура системы представлена на рисунке 8.

1.2.4.4 (MISO - multi-input-singl-output). Математическое описание системы в общем виде следующее

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{v},\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x_0},\ y = \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle. \qquad (1.25)$$

В развернутом виде описание системы (1.25) следующее

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nr} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_r \end{bmatrix};$$

(1.26)

$$y = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

В скалярном виде описание системы (1.25) следующее

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + b_{11}v_1 + b_{12}v_2 + \dots + b_{1r}v_r; \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + b_{21}v_1 + b_{22}v_2 + \dots + b_{2r}v_r; \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots; \\ \dot{x}_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + b_{n1}v_1 + b_{n2}v_2 + \dots + b_{nr}v_r. \end{aligned} \tag{1.27}$$

$$y = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n.$$

Помимо устойчивости для данной системы существуют такие понятия, как свойство полной управляемости и свойство полной наблюдаемости. Структура системы представлена на рисунке 9.

1.2.4.4 (MIMO - multi-input-multi-output) без матрицы обхода. Математическое описание системы в общем виде следующее

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{v}, \ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x_0}, \ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}. \tag{1.28}$$

В развернутом виде описание системы (1.28) следующее

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nr} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_r \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{k1} & c_{k2} & \dots & c_{kn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}. \qquad (1.29)$$

В скалярном виде описание системы (1.28) следующее

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + b_{11}v_1 + b_{12}v_2 + \dots + b_{1r}v_r; \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + b_{21}v_1 + b_{22}v_2 + \dots + b_{2r}v_r; \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots; \\ \dot{x}_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + b_{n1}v_1 + b_{n2}v_2 + \dots + b_{nr}v_r; \end{aligned} \qquad (1.30)$$

$$\begin{aligned} y_1 &= c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1n}x_n; \\ y_2 &= c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \dots + c_{2n}x_n; \\ &\dots\dots\dots\dots\dots; \\ y_k &= c_{k1}x_1 + c_{k2}x_2 + \dots + c_{kn}x_n. \end{aligned}$$

Помимо устойчивости для данной системы существуют такие понятия, как свойство полной управляемости и свойство полной наблюдаемости. Структура системы представлена на рисунке 10.

1.2.4.5 (MIMO - multi-input-multi-output) с матрицей обхода. Математическое описание системы в общем виде следующее

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{v},\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x_0},\ \ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{v}. \qquad (1.31)$$

В развернутом виде описание системы (1.31) следующее

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nr} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_r \end{bmatrix};$$

(1.32)

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{k1} & c_{k2} & \dots & c_{kn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1r} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{k1} & d_{k2} & \dots & d_{kr} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_r \end{bmatrix}.$$

В скалярном виде описание системы (1.31) следующее

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + b_{11}v_1 + b_{12}v_2 + \ldots + b_{1r}v_r; \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + b_{21}v_1 + b_{22}v_2 + \ldots + b_{2r}v_r; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \\ \dot{x}_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n + b_{n1}v_1 + b_{n2}v_2 + \ldots + b_{nr}v_r. \end{aligned}$$

(1.33)

$$\begin{aligned} y_1 &= c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1n}x_n + d_{11}v_1 + d_{12}v_2 + \ldots + d_{1r}v_r; \\ y_2 &= c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \ldots + c_{2n}x_n + d_{21}v_1 + d_{22}v_2 + \ldots + d_{2r}v_r; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \\ y_k &= c_{k1}x_1 + c_{k2}x_2 + \ldots + c_{kn}x_n + d_{n1}v_1 + d_{n2}v_2 + \ldots + d_{nr}v_r. \end{aligned}$$

Помимо устойчивости для данной системы существуют такие понятия, как свойство полной управляемости и свойство полной наблюдаемости. Структура системы представлена на рисунке 11.

1.3 Устойчивость систем. Для исследования рассмотренных систем на устойчивость необходимо определить матрицу

$$
\left[\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}\right]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & .. & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} - \lambda \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} =
$$

$$
= \begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{bmatrix}, \tag{1.34}
$$

где $\mathbf{A}$ - матрица состояния системы размера $n \times n$; $\mathbf{E}$ - единичная матрица размера $n \times n$; λ_i $(i=1,\ 2,\ \dots,\ n)$ собственные числа матрицы состояния $\mathbf{A}$.

Для асимптотической устойчивости системы необходимо и достаточно, чтобы все корни λ_i $(i=1,2,\dots,n)$ характеристического уравнения

$$
\det\left[\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}\right]=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} =
$$

$$
= q_0\lambda^n + q_1\lambda^{n-1} + q_2\lambda^{n-2} + \dots + q_{n-2}\lambda^2 + q_{n-1}\lambda^1 + q_n\lambda^0 = 0. \tag{1.34}
$$

располагались в левой полуплоскости комплексной плоскости (имели отрицательные действительные части). Для проверки условий устойчивости можно воспользоваться любым известным критерием устойчивости для линейных систем.

1.3.1 Так для $n=2$ характеристическое уравнение (1.34) будет иметь вид

$$\det[\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}]=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix}=$$

$$=\lambda^2-(a_{11}+a_{22})\lambda+a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=q_0\lambda^2+q_1\lambda^1+q_2\lambda^0=0. \tag{1.35}$$

Для устойчивости системы (при $n=2$) необходимо и достаточно, чтобы для уравнения (1.35) выполнялись условия: $q_0>0$, $q_1>0$, $q_2>0$, или $a_{11}+a_{22}<0$, $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}>0$.

1.3.2 Для $n=3$ характеристическое уравнение (1.34) будет иметь вид

$$\det[\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}]=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix}=$$

$$=q_0\lambda^3+q_1\lambda^2+q_2\lambda^1+q_3\lambda^0=0, \tag{1.36}$$

где $q_0=1$; $q_1=-(a_{11}+a_{22}+a_{33})$;

$q_2=a_{11}a_{22}+a_{11}a_{33}+a_{22}a_{33}-(a_{13}a_{31}+a_{32}a_{23}+a_{12}a_{21})$;

$q_3=a_{13}a_{31}a_{22}+a_{32}a_{23}a_{11}+a_{12}a_{21}a_{33}-(a_{12}a_{23}a_{31}+a_{21}a_{13}a_{32}+a_{11}a_{22}a_{33})$.

Для устойчивости системы (при $n=3$) необходимо и достаточно, чтобы для уравнения (1.36) выполнялись условия: $q_0>0$, $q_1>0$, $q_2>0$, $q_3>0$ (условия А.Стодолы) и $q_1q_2>q_0q_3$ (критерий И.А.Вышнеградского).

1.3.3 Для $n=4$ характеристическое уравнение (1.34) будет иметь вид

$$\det[\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}]=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}-\lambda \end{vmatrix}=$$

$$=q_0\lambda^4+q_1\lambda^3+q_2\lambda^2+q_3\lambda^1+q_4\lambda^0=0. \qquad (1.37)$$

Для исследования устойчивости системы (при $n=4$) можно применить матрицу А.Гурвица

$$\mathbf{G}=\begin{bmatrix} q_1 & q_3 & 0 & 0 \\ q_0 & q_2 & q_4 & 0 \\ 0 & q_1 & q_3 & 0 \\ 0 & q_0 & q_2 & q_4 \end{bmatrix}.$$

Для устойчивости системы (при $n=4$) необходимо и достаточно, чтобы для уравнения (1.37) выполнялись условия: $q_0>0$, $q_1>0$, $q_2>0$, $q_3>0$, $q_4>0$ (условия А.Стодолы) и

$$\det\begin{bmatrix} q_1 & q_3 \\ q_0 & q_4 \end{bmatrix}=q_1q_2-q_0q_3>0,\ \det\begin{bmatrix} q_1 & q_3 & 0 \\ q_0 & q_2 & q_4 \\ 0 & q_1 & q_3 \end{bmatrix}=q_3(q_1q_2-q_0q_3)-q_1^2q_4>0.$$

1.4 Устойчивость систем, состоящих из объекта управления и управляющего устройства

1.4.1 Рассмотрим автоматическую систему, состоящую из объекта управления (системы вида (1.16)) и управляющего устройства

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{b}v,\ \mathbf{x}(0)=\mathbf{x}_0 \text{ и } \dot{v}=\langle\mathbf{c},\mathbf{x}\rangle+d_0v,\ v(0)=v_0. \qquad (1.38)$$

В развернутом виде описание системы (1.38) следующее

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} \times v;$$

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} + d_0 \times v. \tag{1.39}$$

В скалярном виде описание системы (1.19) следующее

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + b_1 v; \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + b_2 v; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \\ \dot{x}_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n + b_n v; \\ \dot{v} &= c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n + d_0 v. \end{aligned} \tag{1.40}$$

Структура системы представлена на рисунке 12.

Матрица состояния системы (1.38) при $n = 2$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{b} \\ \mathbf{c} & d_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ c_1 & c_2 & d_0 \end{bmatrix}.$$

Характеристическое уравнение системы (1.38) при $n = 2$ следующее

$$\det[\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}] = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & b_2 \\ c_1 & c_2 & d_0 - \lambda \end{vmatrix} =$$

$$= q_0\lambda^3 + q_1\lambda^2 + q_2\lambda^1 + q_3\lambda^0 = 0, \tag{1.40}$$

где $q_0 = 1$;

$q_1 = -(a_{11} + a_{22} + d_0)$;

$q_2 = a_{11}a_{22} + a_{11}d_0 + a_{22}d_0 - (b_1c_1 + c_2b_2 + a_{12}a_{21})$;

$q_3 = b_1c_1a_{22} + a_{12}b_2a_{11} + a_{12}a_{21}d_0 - (a_{12}b_2c_1 + a_{21}b_1c_2 + a_{11}a_{22}d_0)$.

Условия устойчивости системы (1.38) при $n = 2$ следующие: $q_0 > 0$, $q_1 > 0,\ q_2 > 0,\ q_3 > 0$ (условия А.Стодолы) и $q_1q_2 > q_0q_3$ (критерий И.А. Вышнеградского).

1.4.2 Рассмотрим автоматическую систему, состоящую из объекта управления (системы вида (1.31)) и управляющего устройства

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bv},\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x_0} \text{ и } \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{Cx} + \mathbf{Bv},\ \mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0. \tag{1.41}$$

В развернутом виде описание системы (1.19) следующее

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nr} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_r \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \\ \dots \\ \dot{v}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{k1} & c_{k2} & \dots & c_{kn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1r} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{k1} & d_{k2} & \dots & d_{kr} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_r \end{bmatrix}; \tag{1.42}$$

$r = k.$

В скалярном виде описание системы (1.41) следующее

$$\dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + b_{11}v_1 + b_{12}v_2 + \ldots + b_{1r}v_r;$$
$$\dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + b_{21}v_1 + b_{22}v_2 + \ldots + b_{2r}v_r;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$
$$\dot{x}_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n + b_{n1}v_1 + b_{n2}v_2 + \ldots + b_{nr}v_r.$$

$$\dot{v}_1 = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1n}x_n + d_{11}v_1 + d_{12}v_2 + \ldots + d_{1r}v_r; \qquad (1.43)$$
$$\dot{v}_2 = c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \ldots + c_{2n}x_n + d_{21}v_1 + d_{22}v_2 + \ldots + d_{2r}v_r;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$
$$\dot{v}_k = c_{k1}x_1 + c_{k2}x_2 + \ldots + c_{kn}x_n + d_{n1}v_1 + d_{n2}v_2 + \ldots + d_{nr}v_r;$$

$$r = k.$$

Структура системы представлена на рисунке 13.

Матрица состояния системы (1.41) при $n = 2$, $r = k = 2$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & b_{11} & b_{12} \\ a_{21} & a_{22} & b_{12} & b_{22} \\ c_{11} & c_{12} & d_{11} & d_{12} \\ c_{21} & c_{22} & d_{21} & d_{22} \end{bmatrix}.$$

Характеристическое уравнение системы (1.41) при $n = 2$ и $r = k = 2$ следующее

$$\det[\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}] = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & b_{11} & b_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & b_{21} & b_{22} \\ c_{11} & c_{12} & d_{11} - \lambda & d_{12} \\ c_{21} & c_{22} & d_{21} & d_{22} - \lambda \end{vmatrix} =$$
$$= q_0\lambda^4 + q_1\lambda^3 + q_2\lambda^2 + q_3\lambda^1 + q_4\lambda^0 = 0. \qquad (1.44)$$

Дляя устойчивости системы (1.41) при $n = 2$, $r = k = 2$ необходимо и достаточно, чтобы для уравнения (1.44) выполнялись условия: $q_0 > 0$, $q_1 > 0$, $q_2 > 0$, $q_3 > 0$, $q_4 > 0$ (условия А.Стодолы) и

$$\det\begin{bmatrix} q_1 & q_3 \\ q_0 & q_4 \end{bmatrix} = q_1 q_2 - q_0 q_3 > 0,\ \det\begin{bmatrix} q_1 & q_3 & 0 \\ q_0 & q_2 & q_4 \\ 0 & q_1 & q_3 \end{bmatrix} = q_3(q_1 q_2 - q_0 q_3) - q_1^2 q_4 > 0,$$

получаемые в соответствии с критерием А.Гурвица

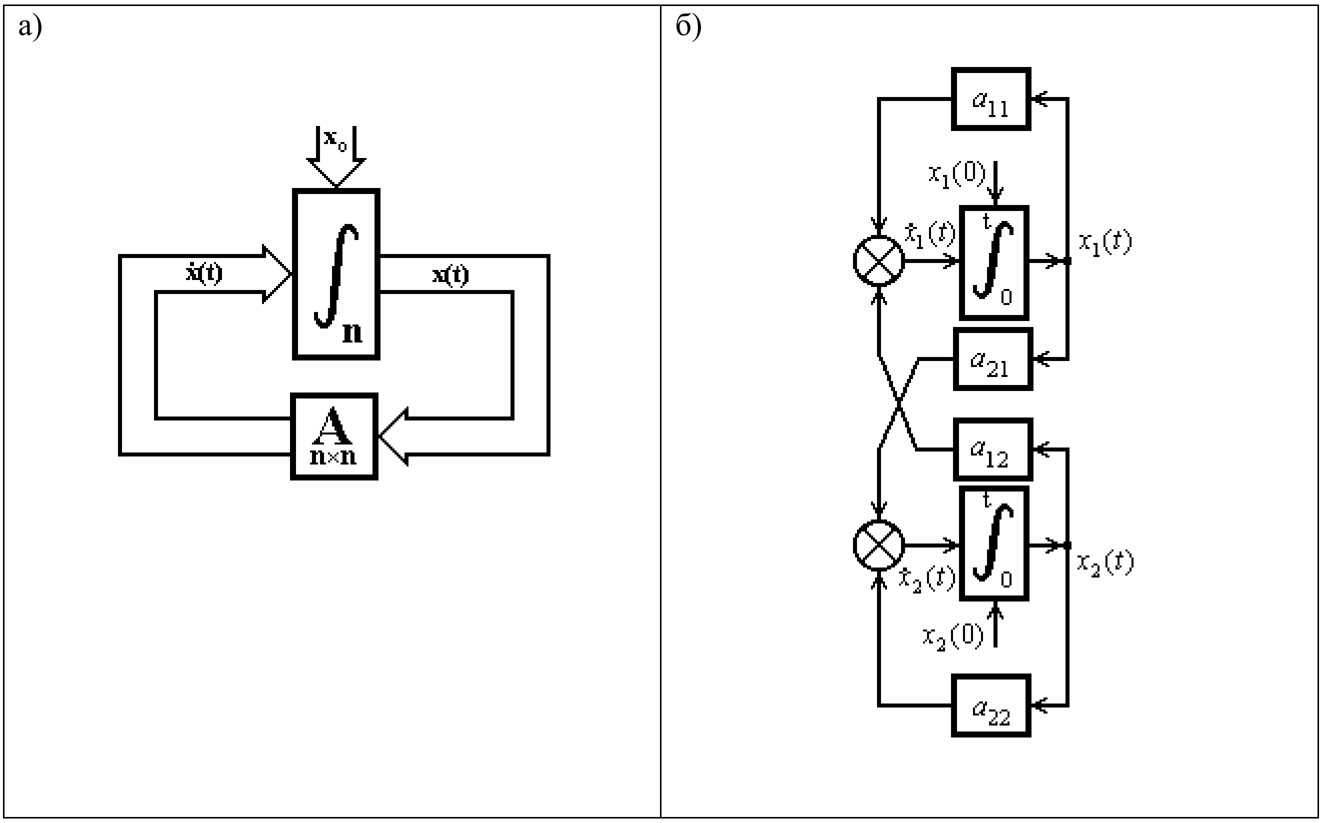


Рисунок 1 - Структура системы (1.1) а) в общем виде; б) при $n = 2$

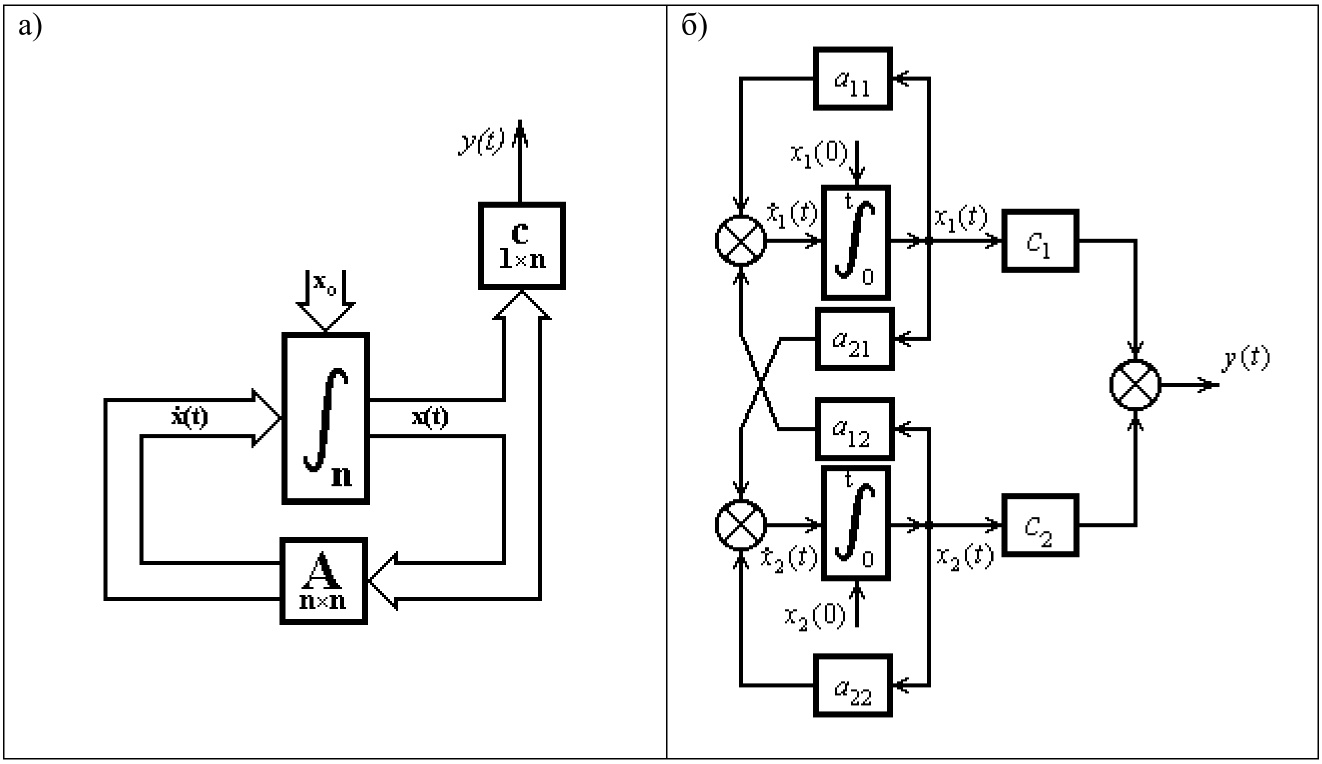


Рисунок 2 – Структура системы (1.4) а) в общем виде; б) при $n = 2$

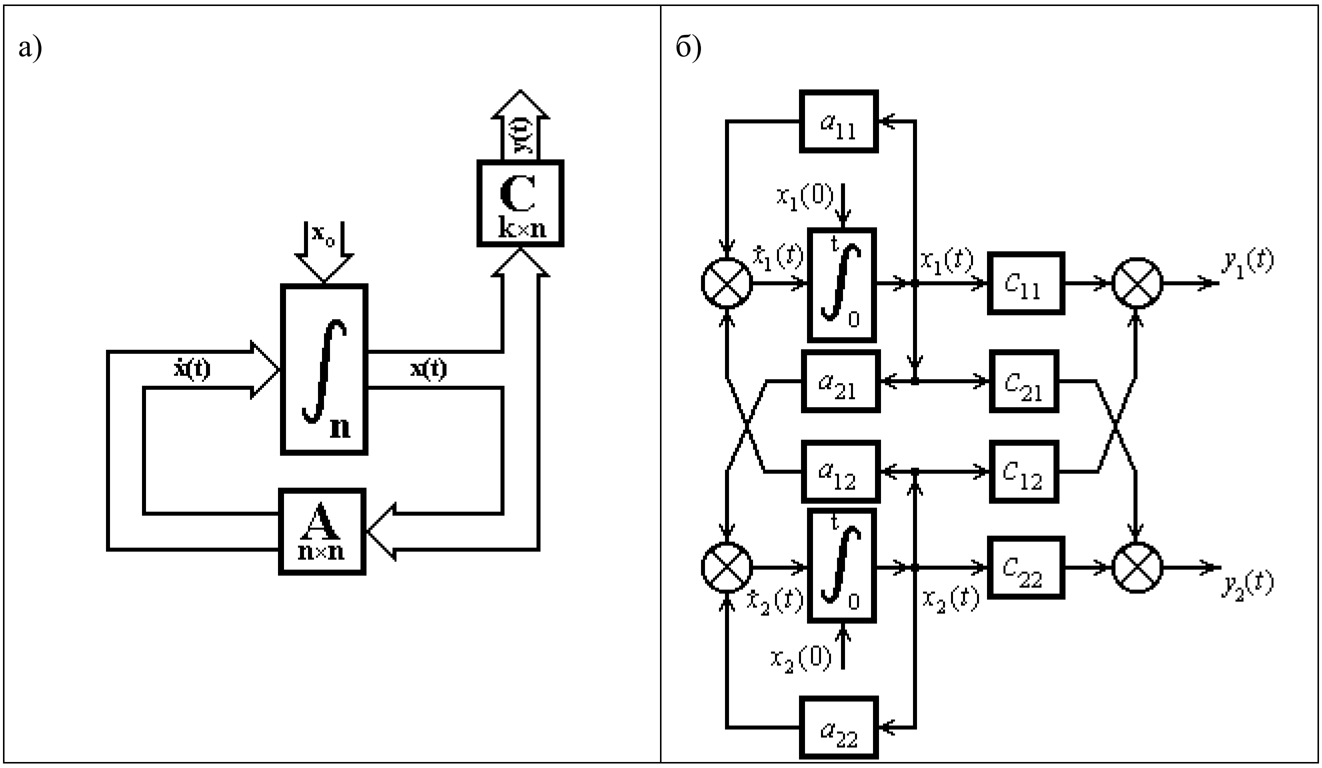


Рисунок 3 – Структура системы (1.7) а) в общем виде; б) при $n = 2$ и $k = 2$

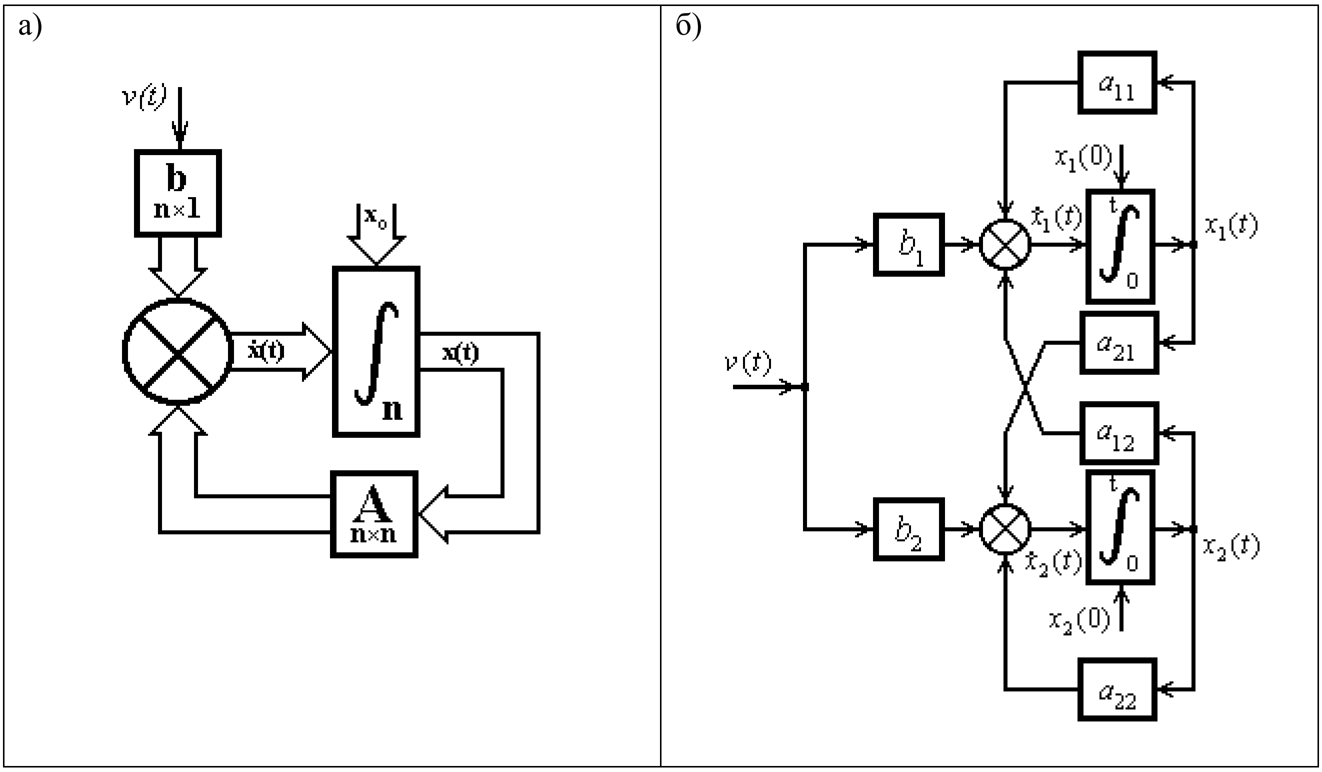


Рисунок 4 – Структура системы (1.10) а) в общем виде; б) при $n = 2$

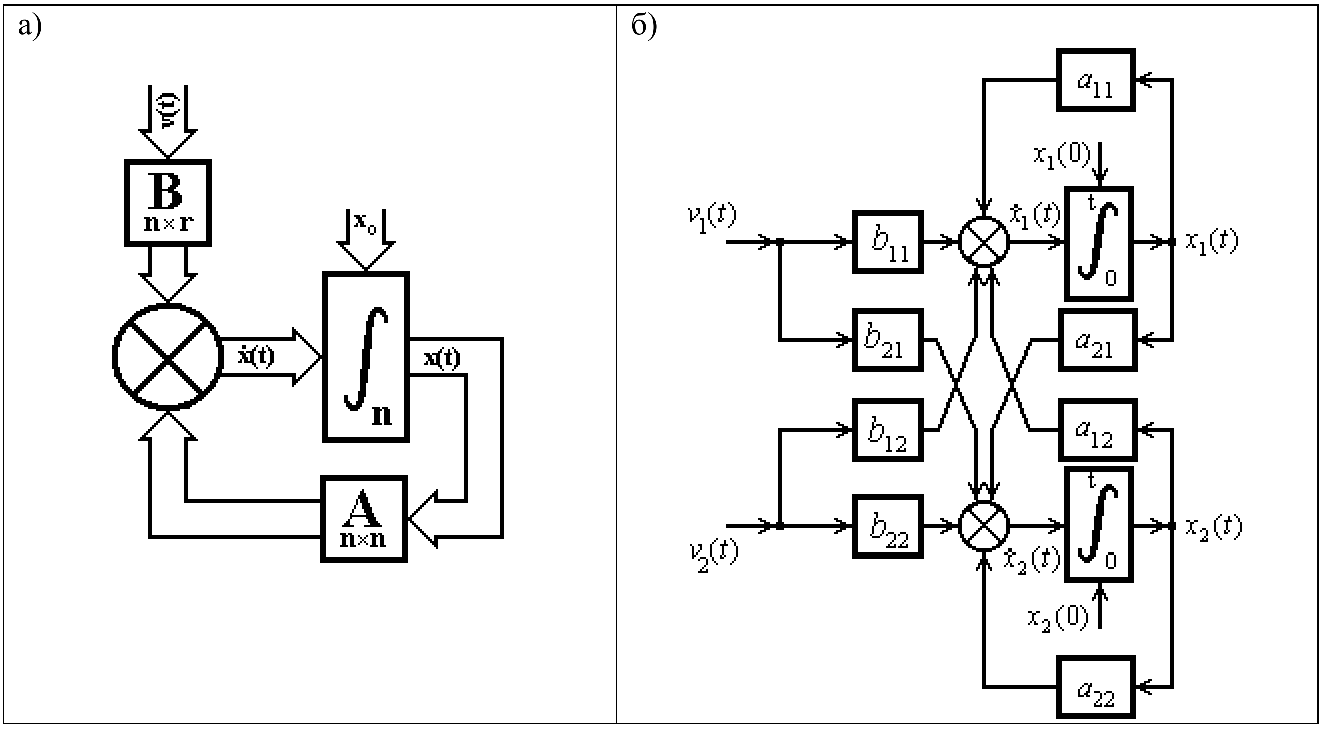


Рисунок 5 – Структура системы (1.13) а) в общем виде; б) при $n = 2$ и $r = 2$

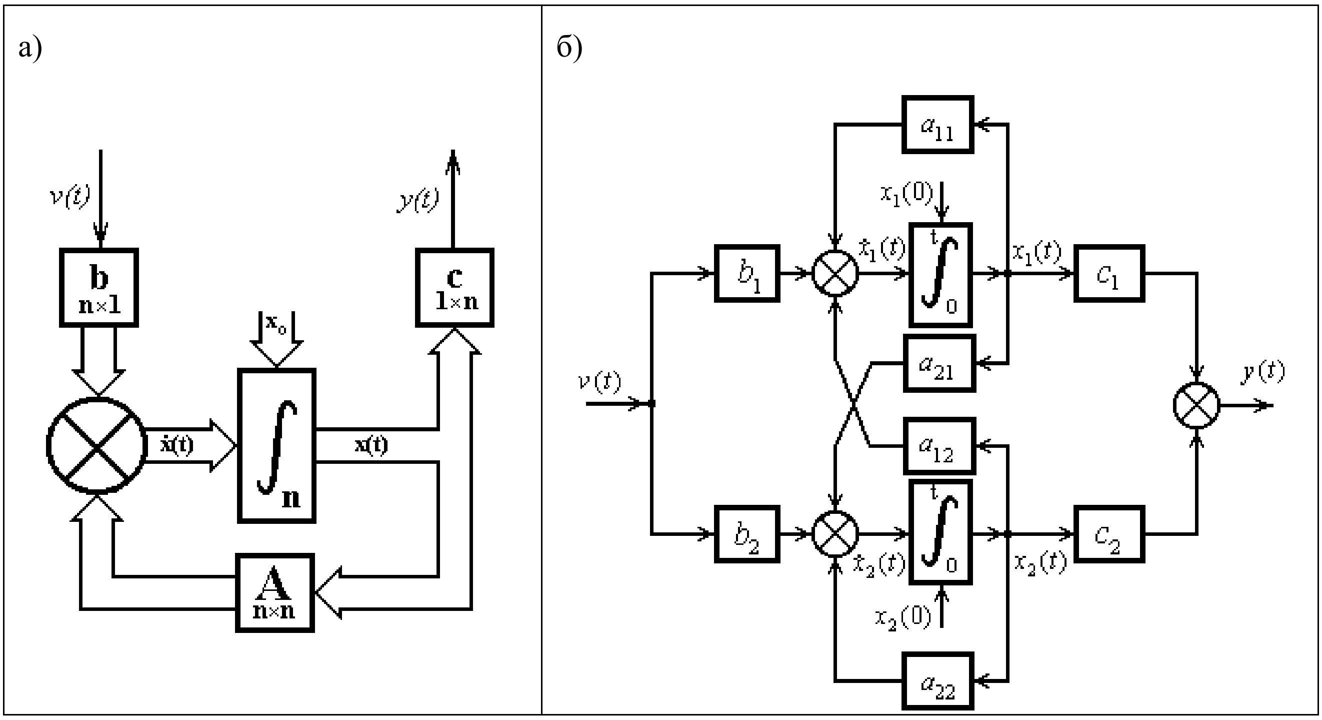


Рисунок 6 – Структура системы (1.16) а) в общем виде; б) при $n = 2$

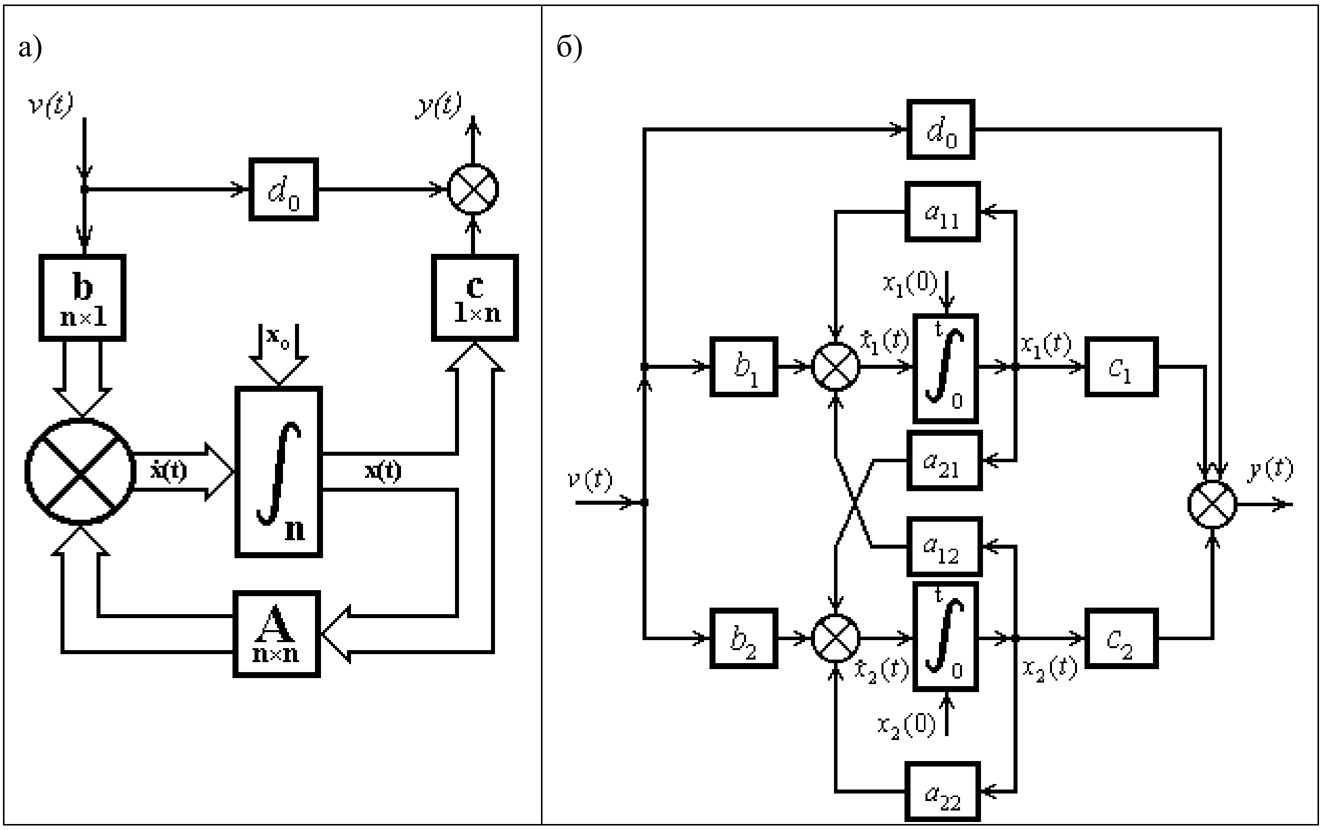


Рисунок 7 – Структура системы (1.19) а) в общем виде; б) при $n = 2$

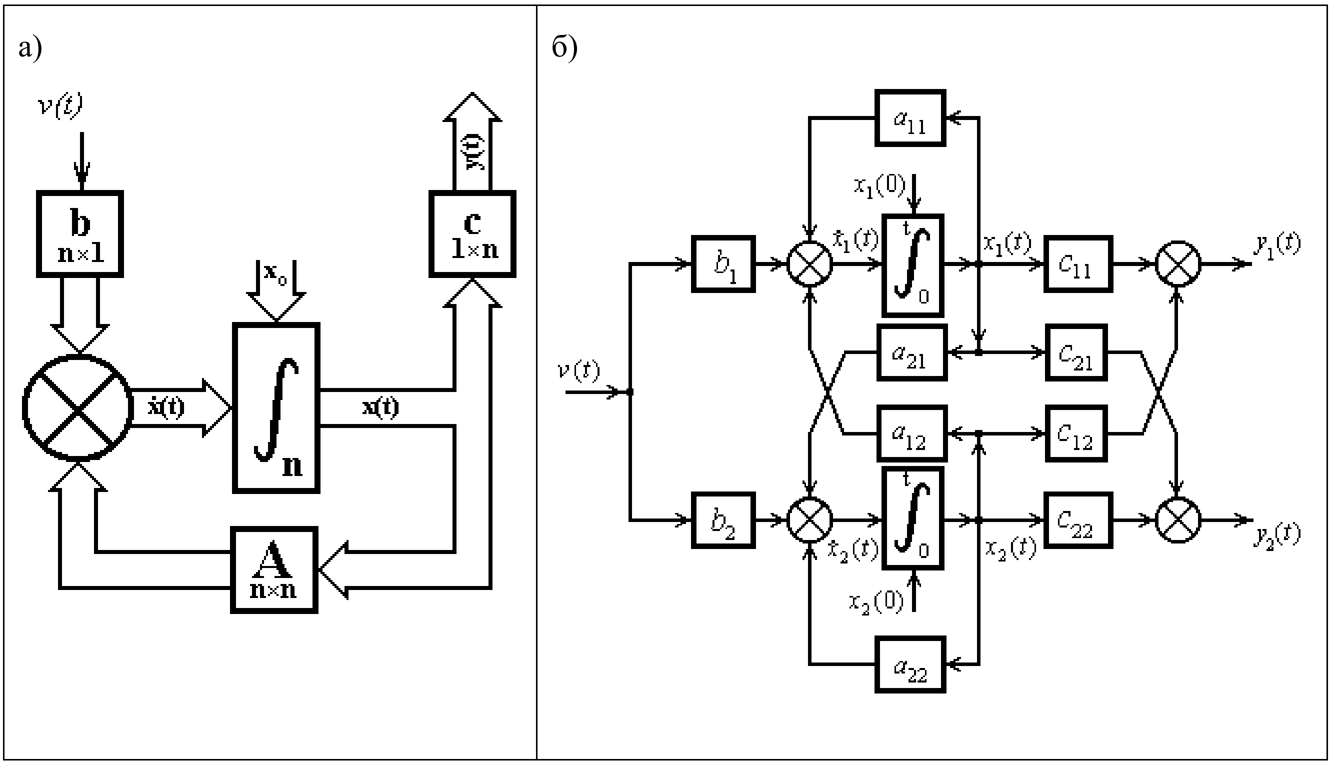


Рисунок 8– Структура системы (1.22) а) в общем виде; б) при $n = 2$

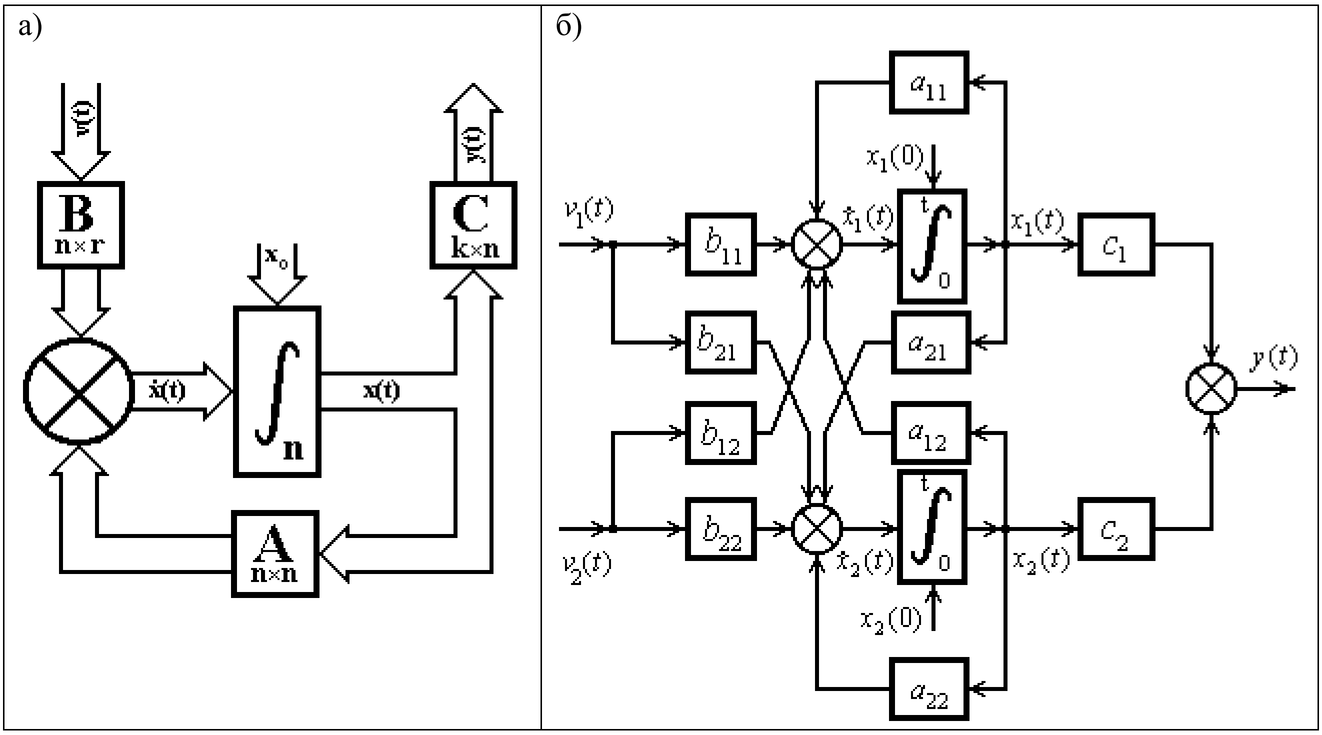


Рисунок 9 - Структуры системы (1.25) а) в общем виде; б) при $n = 2$, $r = 2$ и $k = 2$

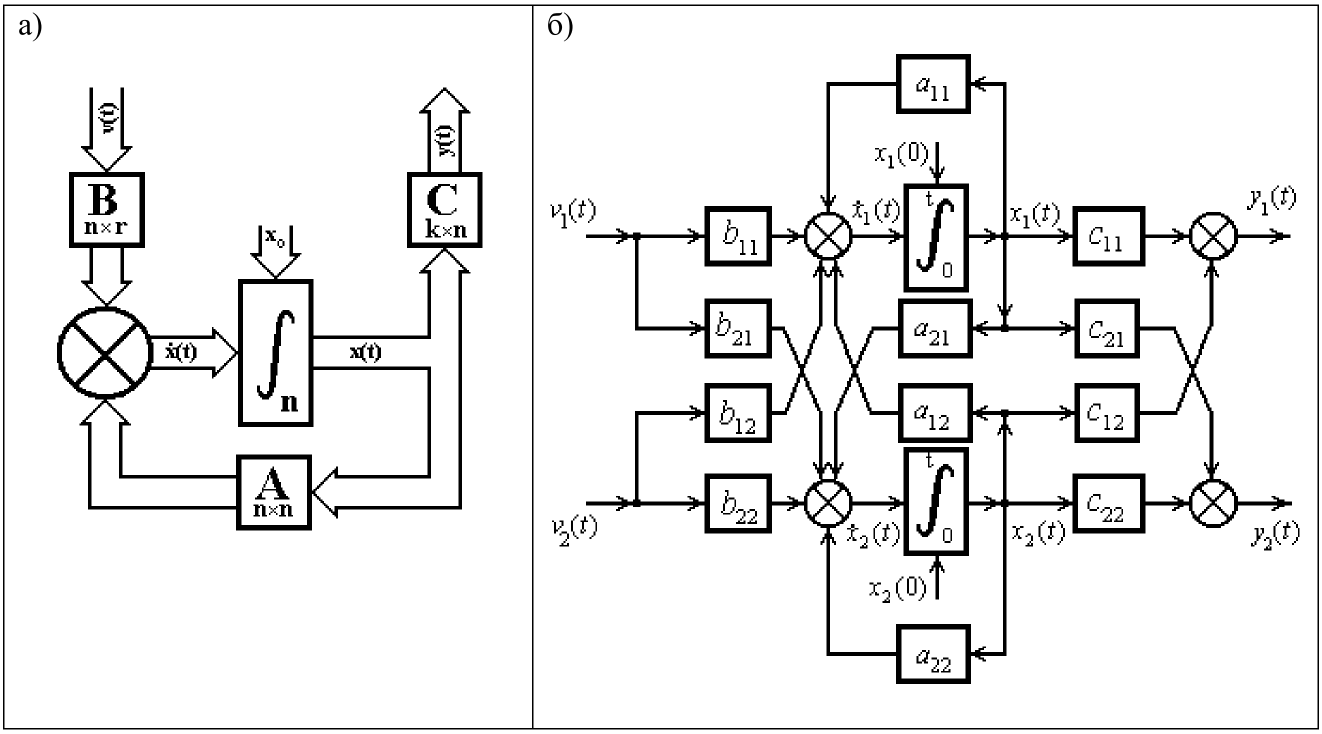


Рисунок 10 – Структуры системы (1.28) а) в общем виде; б) при $n = 2$, $r = 2$ и $k = 2$

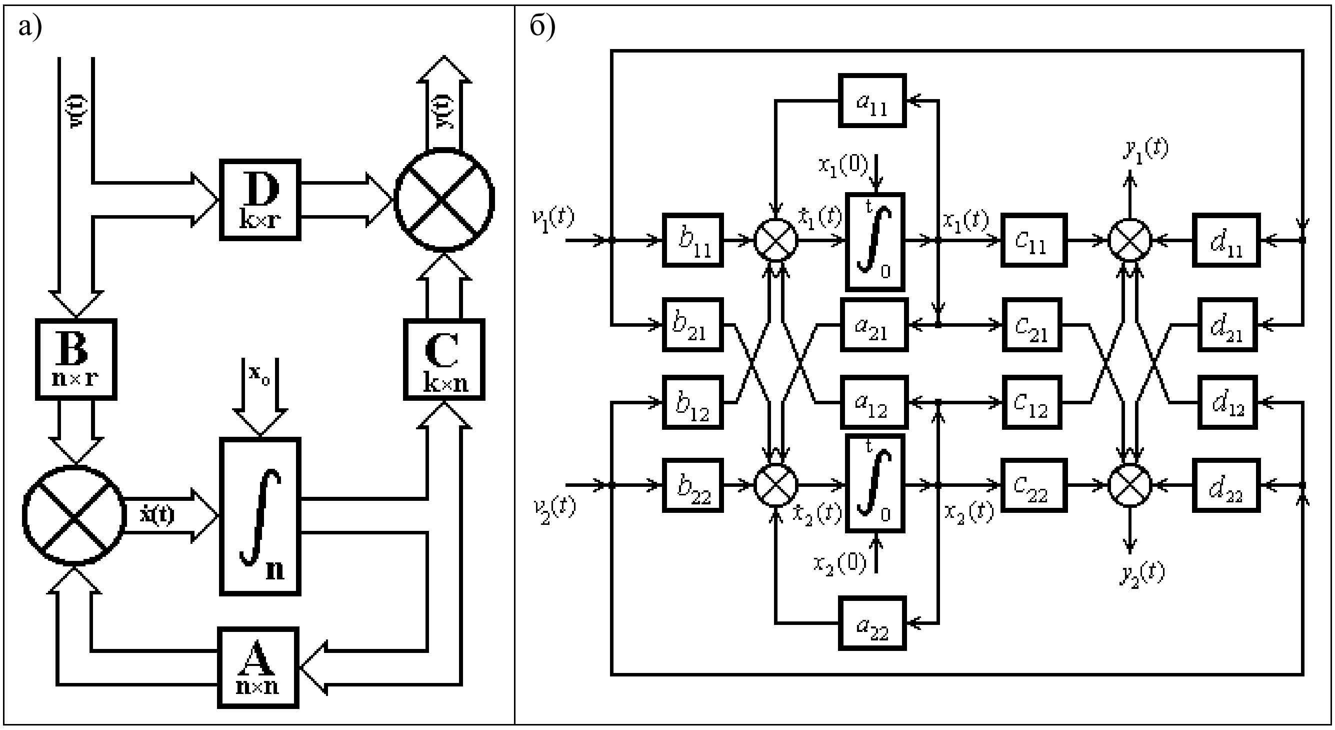


Рисунок 11 – Структура системы (1.31) а) в общем виде; б) при $n = 2$, $r = 2$ и $k = 2$

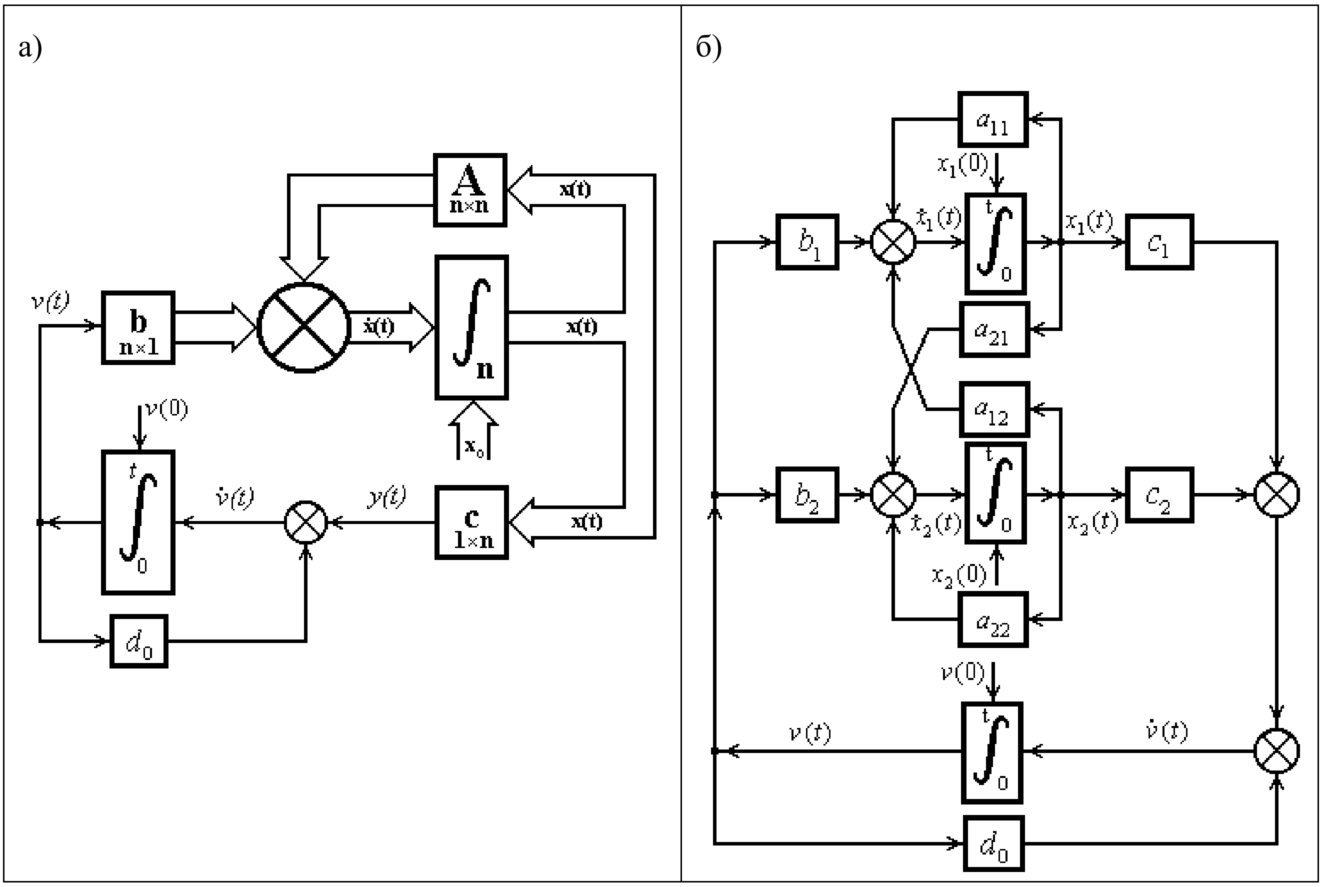


Рисунок 12 – Структура системы (1.38) а) в общем виде; б) при $n = 2$

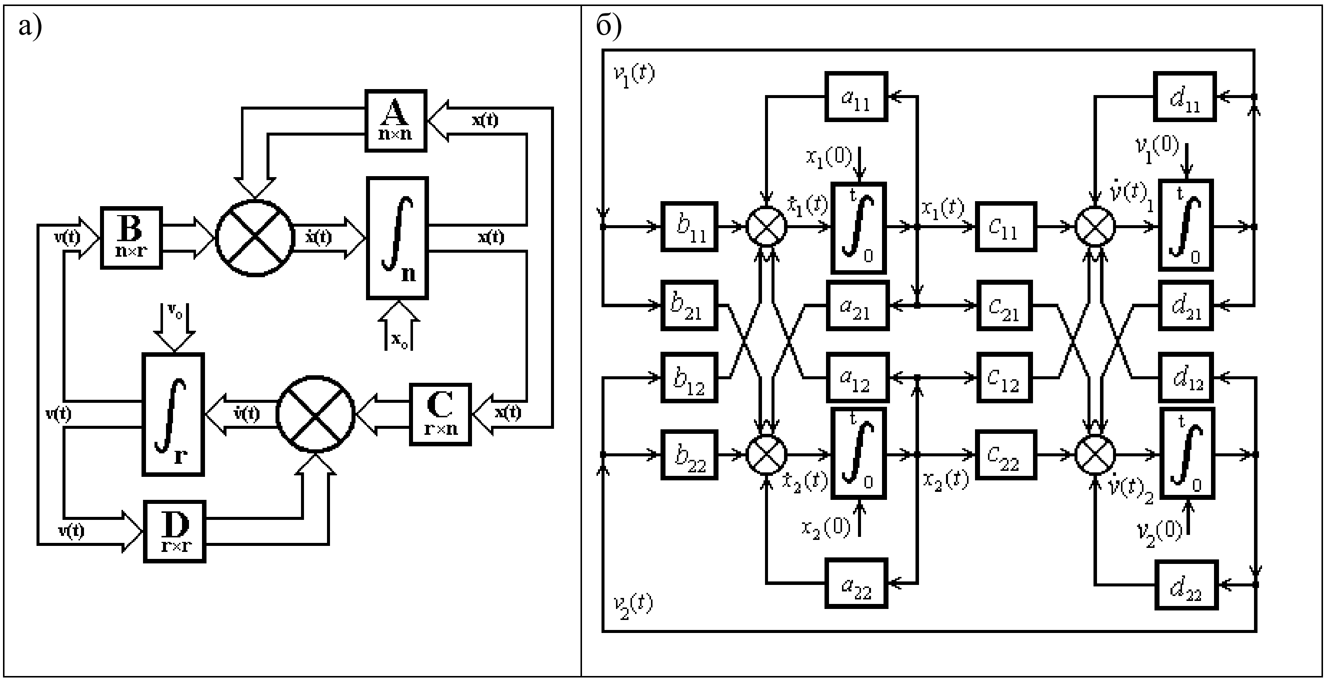
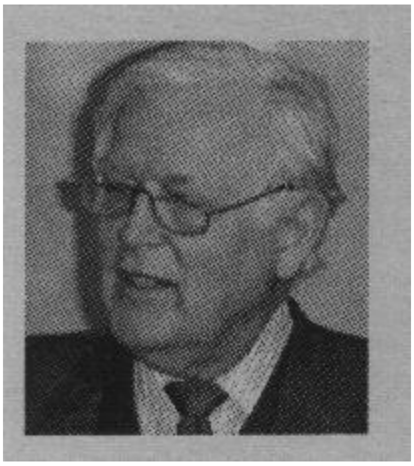


Рисунок 13 - Структура системы (1.41) при $n = 2$ а) в общем виде; б) при $n = 2,\ r = 2$

1.5 Понятия управляемости и наблюдаемости

1.5.1 История вопроса. Понятия: «Управляемость» и «Наблюдаемость» были введены и сформулированы в 60-х годах прошлого столетия американским математиком Р. Калманом (R.E. Kalman).



Рудольф Эмиль Калман родился 19 мая 1930 года в г. Будапеште. Получил степени бакалавра (1953) и магистра (1954) электротехники в Масачусетском технологическом институте, а докторскую степень (1957) – в Колумбийском университете (США).

С 1954 по 1964 работал в Принстонском институте перспективных исследований, где получил ряд выдающихся результатов, позволяющих считать его одним из основателей современной теории систем и теории управления. Фильтр Калмана, критерии управляемости и наблюдаемости Калмана, лемма Якубовича-Калмана известны далеко за пределами теории управления. Разработанные им концепции и методы широко используются инженерами и исследователями в различных областях науки и техники.

Р.Калман является почетным доктором многих университетов, членом ряда академий, лауреатом нескольких престижных премий, в том числе премии Киото (1985), часто называемой «Азиатской Нобелевской премией». В 1994 году он был избран иностранным членом Российской академии наук.

Данные понятия имеют практическое значение при управлении сложными объектами, математическими образами которых служат многомерные автоматические системы.

1.52 Постановка задачи. Дана линейная многомерная стационарная система управления, поведение которой описывается уравнениями состояния и выхода:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{v}, \;\; \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}, \tag{1.45}$$

где $\mathbf{x}$ - n- мерный вектор состояния; $\mathbf{v}$ - r- мерный вектор управления (входа); $\mathbf{y}$ - k- мерный вектор наблюдения (выхода); **A, B, C** - матрицы вещественных коэффициентов размера $(n \times n)$, $(n \times r)$ и $(k \times n)$ соответственно.

Система (1.45) называется ***вполне управляемой по состоянию,*** если выбором управляющего воздействия $\mathbf{v}$ на промежутке времени $t_0 \le t \le t_1$ можно перевести систему из любого начального состояния $\mathbf{x_0}$ в произвольное заранее заданное конечное состояние $\mathbf{x_1}$.

Система (1.45) называется ***вполне управляемой по выходу,*** если выбором управляющего воздействия $\mathbf{v}$ на промежутке времени $t_0 \le t \le t_1$ можно перевести систему из любого начального состояния $\mathbf{x_0}$ в такое конечное состояние, при котором обеспечивается заранее заданное произвольное значение выхода $\mathbf{y_1}$.

Система (1.45) называется ***вполне наблюдаемой,*** если по реакции $\mathbf{y}$ на выходе системы на промежутке времени $t_0 \le t \le t_1$ при заданном управляющем воздействии $\mathbf{v}$ можно определить начальное состояние $\mathbf{x_0}$.

Постановка задачи формулируется следующим образом: пусть известны матрицы $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ системы (1.45). Требуется определить, является ли система вполне управляемой и наблюдаемой.

1.5.3 Критерии управляемости и наблюдаемости. ***1) Критерий управляемости по состоянию.*** *Для того чтобы система* (2.1) *была вполне управляемой по состоянию, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы управляемости по состоянию*

$$\mathbf{W} = \left[\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \mathbf{A^2B} \quad \dots \quad \mathbf{A^{n-1}B}\right]$$

равнялся размерности вектора состояния:

$$rang\,\mathbf{W} = n. \qquad (1.46)$$

2) Критерий управляемости по *выходу. Для того чтобы система* (1.46) *была вполне управляемой по выходу, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы управляемости по выходу*

$$\mathbf{P} = \left[\mathbf{CB} \quad \mathbf{CAB} \quad \mathbf{CA}^2\mathbf{B} \quad \dots \quad \mathbf{CA}^{n-1}\mathbf{B}\right]$$

равнялся размерности вектора выхода:

$$rang\,\mathbf{P} = k. \qquad (1.47)$$

3) Критерий наблюдаемости. *Для того чтобы система была вполне наблюдаемой, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы наблюдаемости*

$$\mathbf{Q} = \left[\mathbf{C}^T \quad \mathbf{A}^T\mathbf{C}^T \quad (\mathbf{A}^T)^2\mathbf{C}^T \quad \ldots \quad (\mathbf{A}^T)^{n-1}\mathbf{C}^T\right]$$

равнялся размерности вектора состояния:

$$rang\ \mathbf{Q} = n. \tag{1.48}$$

1.5.4 Пояснения. Пусть дана прямоугольная матрица $\mathbf{W}$ (или $\mathbf{P}, \mathbf{Q}$) - таблица любых ml чисел, расположенных в m строках и l столбцах

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & \ldots & w_{1l} \\ w_{21} & w_{22} & \ldots & w_{2l} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ w_{m1} & w_{m2} & \ldots & w_{ml} \end{bmatrix}. \tag{1.49}$$

В частном случае при $m = l$ матрица $\mathbf{W}$ является квадратной.

Пусть p – любое натуральное число, не превышающее m и l. Выберем в $\mathbf{W}$ произвольным образом p-строчек и p-столбцов. Из элементов матрицы $\mathbf{W}$, лежащих на пересечении выбранных строчек и столбцов, можно образовать определитель, который и называется минором p-го порядка матрицы $\mathbf{W}$.

Если в матрице $\mathbf{W}$ все миноры p–го порядка равны нулю, то равны нулю и все миноры более высокого порядка (если таковые существуют).

Рангом матрицы $\mathbf{W}$ называется такое целое число p, что среди миноров p–го порядка матрицы $\mathbf{W}$ имеется хотя бы один, не равный нулю, а все остальные $p+1$–го порядка (если только их можно составить) сплошь равны нулю

(Боревич З.И. Определители и матрицы: Учеб.пособие для вузов.- 3-е изд. - М.: Наука. Гл.ред.физ.-мат. лит., 1988.- 184 с.).

1.5.5 Частный случай. Рассмотрим линейную многомерную стационарную систему управления следующего вида

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}v, \quad \mathbf{y} = \mathbf{c}\mathbf{x}, \tag{1.50}$$

где, в отличие от системы (1.45), $\mathbf{b}$ - матрица-столбец размерности ($n \times 1$); $\mathbf{c}$ - матрица-строка размерности ($1 \times n$); v - управляющая переменная (скалярная величина).

Система (1.50) является полностью (вполне) управляемой (по состоянию), если выполняется условие

$$\det\left[\mathbf{b} \quad \mathbf{Ab} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{b} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{\mathbf{n-1}}\mathbf{b}\right] \neq 0. \tag{1.51}$$

Система (1.50) является полностью (вполне) наблюдаемой, если выполняется условие

$$\det\left[\mathbf{c}^T \quad \mathbf{A}^T\mathbf{c}^T \quad (\mathbf{A}^T)^2\mathbf{c}^T \quad \dots \quad (\mathbf{A}^T)^{n-1}\mathbf{c}^T\right] \neq 0. \tag{1.52}$$

<u>Пример 1.</u> Система задана следующим описанием

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{b}v;\ y = \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle + d_0 v,\ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix};\ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix};\ \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 & c \end{bmatrix},\ d_0 = 1.$$

Определить значения параметра c, для которых система обладает свойством полной наблюдаемости.

Условие полной наблюдаемости: $\det\left[\mathbf{c}^{\mathrm{T}} \quad \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\right] \neq 0$.

$$\mathbf{c}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix},\ \mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix},\ \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{c}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} a_{11}c_1 + a_{21}c_2 \\ a_{12}c_1 + a_{22}c_2 \end{bmatrix},$$

$$\det\left[\mathbf{c}^{\mathrm{T}} \quad \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\right] = \begin{vmatrix} c_1 & a_{11}c_1 + a_{21}c_2 \\ c_2 & a_{12}c_1 + a_{22}c_2 \end{vmatrix} = a_{12}c_1^2 - (a_{11} - a_{22})c_1c_2 - a_{21}c_2^2 =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1-2c \\ c & 1+4c \end{vmatrix} = 1 + 4c - c + 2c^2 = 2c^2 + 3c + 1 \neq 0.$$

Ответ: при $c \neq \dfrac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{4} = \dfrac{-3 \pm 1}{4}$ (или $c \neq -1, \quad c \neq -0.5$) система обладает свойством полной наблюдаемости.

<u>Пример 2.</u> Система задана следующим описанием

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{b}v, \quad y = \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle + d_0 v,\ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix};\ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ b \end{bmatrix},\ \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix},\ d_0 = 1.$$

Определить значения параметра b, для которых система обладает свойством полной управляемости.

Условие полной управляемости системы: $\det\left[\mathbf{b} \quad \mathbf{Ab}\right] \neq 0$.

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix},\ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},\ \mathbf{Ab} = \begin{bmatrix} a_{11}b_1 + a_{12}b_2 \\ a_{21}b_1 + a_{22}b_2 \end{bmatrix},$$

$$\det\left[\mathbf{b} \quad \mathbf{Ab}\right] = \begin{vmatrix} b_1 & a_{11}b_1 + a_{12}b_2 \\ b_2 & a_{21}b_1 + a_{22}b_2 \end{vmatrix} = a_{21}b_1^2 - (a_{11} - a_{22})b_1b_2 - a_{12}b_2^2 =.$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -1+b \\ b & 3-3b \end{vmatrix} = 3 - 3b + b - b^2 = -b^2 - 2b + 3 \neq 0.$$

Ответ: при $b \neq 1$ и $b \neq -3$ система обладает свойством полной управляемости.