

**К лабораторной работе №3**

**«МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ РЕГУЛЯТОРА Д. УАТТА»**

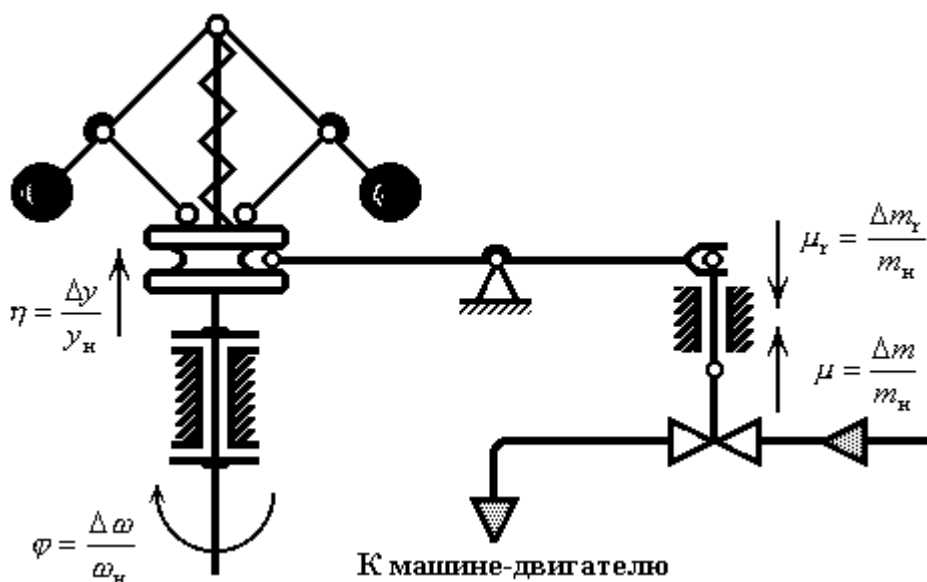


Рисунок 3.1 – Принципиальная схема регулятора Д.Уатта

Математической моделью регулятора является следующее дифференциальное уравнение

$$T_r^2 \ddot{\mu}_r + T_k \dot{\mu}_r + \gamma \mu_r = \varphi. \quad (3.1)$$

Математическую модель регулятора можно представить другим математическим выражением

$$\ddot{\mu}_r = -\frac{T_k}{T_r^2} \dot{\mu}_r - \frac{\gamma}{T_r^2} \mu_r + \frac{1}{T_r^2} \varphi, \quad (3.2)$$

Математическую модель регулятора можно также представить в виде следующей структуры (представлено на рисунке 3.2).

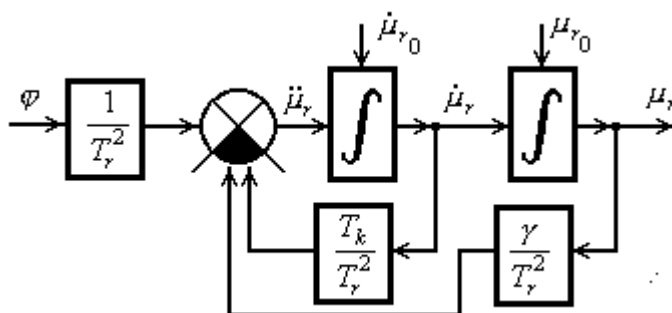


Рисунок 3.2 – Структурная математическая модель регулятора Д.Уатта

В математических моделях регулятора обозначено: 1) переменные:  $\varphi(t) = \frac{\Delta\omega}{\omega_H}$  - относительное изменение угловой частоты вращения;  $\mu_r(t) = \frac{\Delta m_r}{m_{rH}}$  - относительное перемещение выходного штока регулятора;  $\dot{\mu}_r = \frac{d\mu_r}{dt}$  ( $сек^{-1}$ ) и  $\ddot{\mu}_r = \frac{d^2\mu_r}{dt^2}$  ( $сек^{-2}$ ) - скорость и ускорение выходного штока регулятора соответственно;  $t$  - независимая переменная (время,  $сек$ ); 2) Коэффициенты (параметры):  $T_r^2$  - характеризует инерционные свойства регулятора,  $сек^2$ ;  $T_k$  - характеризует демпфирующие свойства регулятора,  $сек$ ;  $\gamma$  - характеризует неравномерность регулятора.

Характеристическим уравнением для (3.1) является следующее уравнение

$$T_r^2 \lambda^2 + T_k \lambda + \gamma = 0. \quad (3.3)$$

Корни характеристического уравнения (3.3) определяются выражением

$$\lambda_{1,2} = \frac{-T_k \pm \sqrt{T_k^2 - 4\gamma T_r^2}}{2T_r^2}, \frac{1}{c}. \quad (3.4)$$

Получим уравнение возмущенного движения регулятора Д.Уатта при  $\mu_r(0) = \mu_{r0}$ ,  $\dot{\mu}_r(0) = \dot{\mu}_{r0}$  и  $\varphi(t) = \varphi_0 = Const$ .

а) корни характеристического уравнения при  $T_k^2 - 4\gamma T_r^2 > 0$  являются действительными отрицательными -

$$\lambda_1 = \frac{-T_k + \sqrt{T_k^2 - 4\gamma T_r^2}}{2T_r^2}, \frac{1}{c}; \quad \lambda_2 = \frac{-T_k - \sqrt{T_k^2 - 4\gamma T_r^2}}{2T_r^2}, \frac{1}{c}. \quad (3.5)$$

$$\mu(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + \frac{\varphi_0}{\gamma}; \quad (3.6)$$

$$\dot{\mu}(t) = \lambda_1 C_1 e^{\lambda_1 t} + \lambda_2 C_2 e^{\lambda_2 t}, \frac{1}{c}$$

Постоянные интегрирования  $C_1$  и  $C_2$  определим из следующей системы уравнений, полученных из (3.6) при  $t = 0$

$$\begin{cases} \mu_0 - \frac{\varphi_0}{\gamma} = C_1 + C_2; \\ \dot{\mu}_0 = \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2, \end{cases} \quad (3.7)$$

в соответствии с правилом Крамера при  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , как

$$C_1 = \frac{\begin{vmatrix} \mu_0 - \frac{\varphi_0}{\gamma} & 1 \\ \dot{\mu}_0 & \lambda_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{vmatrix}} = \frac{\left(\mu_0 - \frac{\varphi_0}{\gamma}\right)\lambda_2 - \dot{\mu}_0}{\lambda_2 - \lambda_1}; \quad C_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \mu_0 - \frac{\varphi_0}{\gamma} \\ \lambda_1 & \dot{\mu}_0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{vmatrix}} = \frac{\dot{\mu}_0 - \left(\mu_0 - \frac{\varphi_0}{\gamma}\right)\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}. \quad (3.8)$$

Подставим постоянные интегрирования (3.8) в (3.6) и окончательно получим уравнения возмущенного движения

$$\begin{aligned} \mu(t) &= \frac{\left(\mu_0 - \frac{\varphi_0}{\gamma}\right)\lambda_2 - \dot{\mu}_0}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{\lambda_1 t} + \frac{\dot{\mu}_0 - \left(\mu_0 - \frac{\varphi_0}{\gamma}\right)\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{\lambda_2 t} + \frac{\varphi_0}{\gamma}; \\ \dot{\mu}(t) &= \lambda_1 \frac{\left(\mu_0 - \frac{\varphi_0}{\gamma}\right)\lambda_2 - \dot{\mu}_0}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{\lambda_1 t} + \lambda_2 \frac{\dot{\mu}_0 - \left(\mu_0 - \frac{\varphi_0}{\gamma}\right)\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{\lambda_2 t}, \frac{1}{c}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

б) корни характеристического уравнения при  $T_k^2 - 4\gamma T_r^2 < 0$  являются комплексными сопряженными с отрицательной вещественной частью -

$$\lambda_{1,2} = \beta \pm j\omega, \frac{1}{c}, \text{ где } \beta = -\frac{T_k}{2T_r^2}, \frac{1}{c}; \quad \omega = \frac{\sqrt{T_k^2 - 4\gamma T_r^2}}{2T_r^2}, \frac{1}{c}. \quad (3.10)$$

$$\mu(t) = e^{\beta t} [C_1 \cos(\omega \cdot t) + C_2 \sin(\omega \cdot t)] + \frac{\varphi_0}{\gamma}; \quad (3.11)$$

$$\dot{\mu}(t) = e^{\beta t} \left\{ \beta [C_1 \cos(\omega \cdot t) + C_2 \sin(\omega \cdot t)] + \omega [C_2 \cos(\omega \cdot t) - C_1 \sin(\omega \cdot t)] \right\}, \frac{1}{c}.$$

Постоянные интегрирования  $C_1$  и  $C_2$  определим из системы уравнений, полученных из (3.11) при  $t = 0$

$$\begin{cases} \mu_0 - \frac{\varphi_0}{\gamma} = C_1; \\ \dot{\mu}_0 = \beta C_1 + \omega C_2, \frac{1}{c} \end{cases} \quad (3.12)$$

соответственно как:

$$C_1 = \mu_0 - \frac{\varphi_0}{\gamma}, \quad C_2 = \frac{\dot{\mu}_0}{\omega} - \frac{\beta}{\omega} \left( \mu_0 - \frac{\varphi_0}{\gamma} \right). \quad (3.13)$$

Подставим постоянные интегрирования (3.13) в (3.11) и окончательно получим уравнения возмущенного движения

$$\begin{aligned} \mu(t) &= e^{\beta t} \left\{ \left( \mu_0 - \frac{\varphi_0}{\gamma} \right) \cos(\omega \cdot t) + \left[ \frac{\dot{\mu}_0}{\omega} - \frac{\beta}{\omega} \left( \mu_0 - \frac{\varphi_0}{\gamma} \right) \right] \sin(\omega \cdot t) \right\} + \frac{\varphi_0}{\gamma}; \\ \dot{\mu}(t) &= e^{\beta t} \left\{ \beta \left[ \left( \mu_0 - \frac{\varphi_0}{\gamma} \right) \cos(\omega \cdot t) + \left[ \frac{\dot{\mu}_0}{\omega} - \frac{\beta}{\omega} \left( \mu_0 - \frac{\varphi_0}{\gamma} \right) \right] \sin(\omega \cdot t) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \omega \left[ \left[ \frac{\dot{\mu}_0}{\omega} - \frac{\beta}{\omega} \left( \mu_0 - \frac{\varphi_0}{\gamma} \right) \right] \cos(\omega \cdot t) - \left( \mu_0 - \frac{\varphi_0}{\gamma} \right) \sin(\omega \cdot t) \right] \right\}, \frac{1}{c} \end{aligned} \quad (3.14)$$

**Пример 1.** Рассмотрим, как будут выглядеть движения регулятора при  $\varphi_0 = 1.0$ ,  $\mu(0) = 0$ ,  $\dot{\mu}(0) = 0.0$ . Параметры регулятора:  $T_r^2 = 0.25 \text{ сек}^2$ ,  $T_k = 0.5 \text{ сек}$ ,  $\gamma = 0.5$ .

Корни характеристического уравнения при заданных параметрах регулятора – комплексные сопряженные  $\lambda_{1,2} = -1 \pm j \cdot 0.5 \text{ c}^{-1}$ .

Подставим начальные условия, значения коэффициентов регулятора и значения вещественной и мнимой частей корней в уравнения (3.14), в результате чего получим:

$$\mu_r(t) = 2 \cdot \left\{ 1 - e^{-t} \cdot [\text{Cos}(0.5 \cdot t) + 2 \cdot \text{Sin}(0.5 \cdot t)] \right\}; \quad (3.15)$$

$$\dot{\mu}_r(t) = 5 \cdot e^{-t} \cdot \text{Sin}(0.5 \cdot t), \text{ c}^{-1}.$$

Изменяя значение независимой переменной  $t$ , с каким-либо шагом в заданном диапазоне  $0 \leq t < \infty$ , и вычисляя по формулам (3.15) для каждого значения независимой переменной  $t$  соответствующие ей значения зависимых переменных  $\mu_r$ ,  $\dot{\mu}_r$  можно построить графики изменения во времени переменных  $\mu_r(t)$ ,  $\dot{\mu}_r(t)$  (представлено на рисунке 3.3).

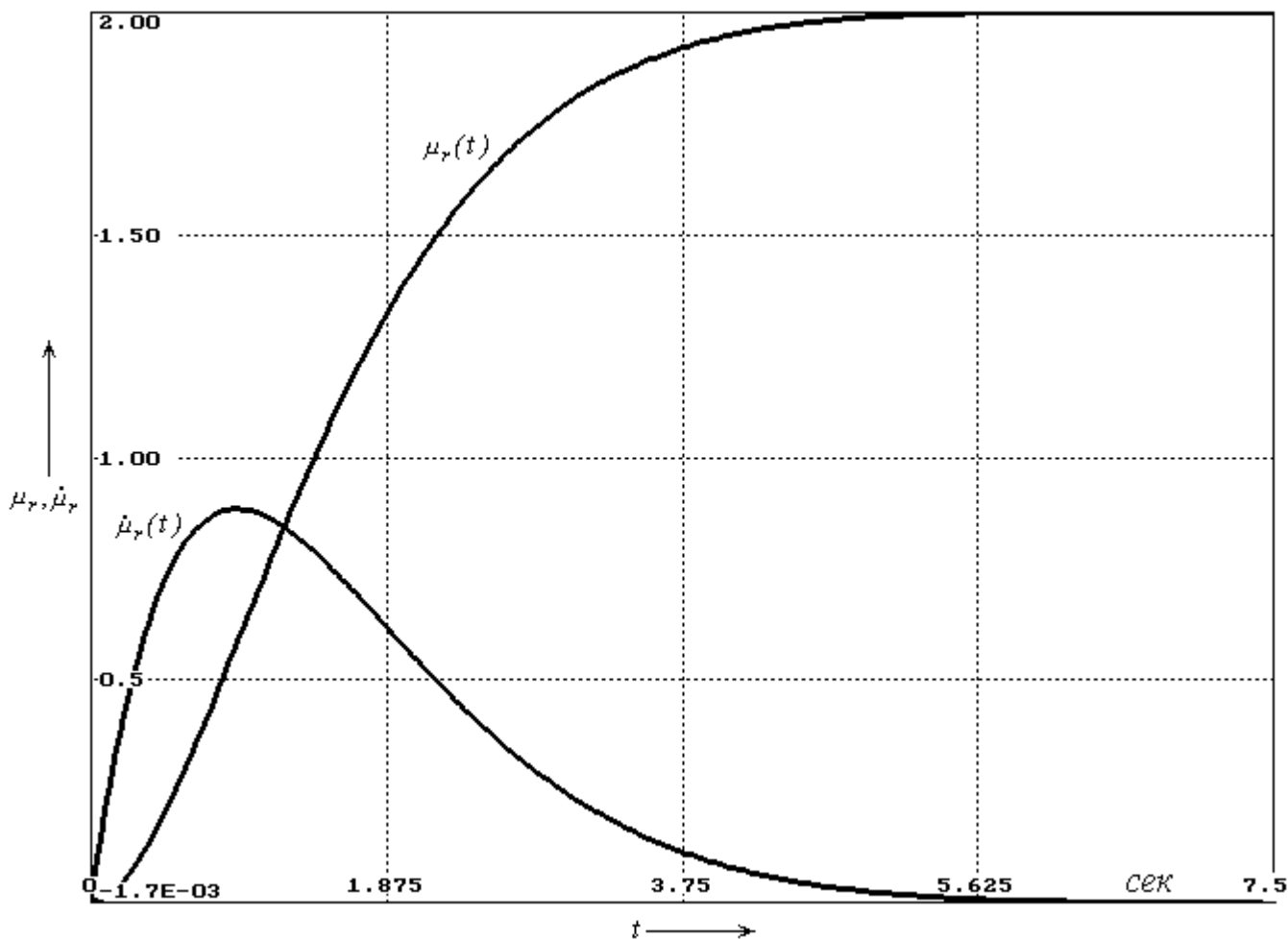


Рисунок 3.3 – Переходные процессы в регуляторе Уатта