

**Тема:** «Появление теории автоматического регулирования (ТАР) .  
Работы Д.-К. Максвелла, И.А.Вышнеградского, А.Стодолы, заложившие основу ТАР

**Лекция 5 - Непрямое регулирование. Работы А.Стодолы: «О регулировании турбин I» (1893), «О регулировании турбин II» (1984), «Принцип регулирования Сименсов и американские инерционные регуляторы» (1899)**

*(продолжение с повторениями)*

**Тема:** «Критерии устойчивости линейных САР - алгебраический критерий устойчивости

**А.Гурвица**

**История задачи.** В работах Д.К.Максвелла и И.А.Вышнеградского речь шла о САР, характеристические полиномы (многочлены) которых имели третью степень  $D(p) = a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3$ . Условия устойчивости (отсутствие корней в правой полуплоскости комплексной плоскости корней) могли быть получены из формулы Кардано (Girolamo Cardano, 1501 - 1576). В наиболее завершённой форме условия устойчивости ( $a_0 > 0, a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0, a_1 a_2 > a_0 a_3$ ) были сформулированы Вышнеградским, и поэтому стали называться условиями (критерием) Вышнеградского.

На заседании Лондонского математического общества в 1868 году Максвелл поставил задачу о разыскании условий для многочленов любой степени. Между тем эта задача фактически была решена еще в 1851 году французским математиком Ш.Эрмитом (Charles Hermite, 1822 - 1901). Однако результаты Эрмита не были доведены до практически удобных алгоритмов вычисления или формул и остались не известными специалистам, работающим в прикладных областях.

Задачу Максвелла решил в 1875 году английский математик и механик Э.Раус. Он указал удобный алгоритм, позволяющий для любого многочлена конечным числом простых арифметических действий определить условия устойчивости.

В конце 19 века А.Стодола, не зная работ Рауса, доказал необходимое условие устойчивости (положительность всех коэффициентов характеристического полинома) и поставил задачу об отыскании необходимых и достаточных условий перед выдающимся немецким (швейцарским) математиком А.Гурвицем (Adolf Hurwitz, 1859 - 1919). В 1895 году Гурвиц, опираясь на работы Эрмита, дал (независимое от Рауса) решение задачи в виде определенных условий (неравенств), накладываемых на коэффициенты полинома.

Это решение получило всеобщую известность и условия, найденные Гурвицем, стали называться критерием Рауса-Гурвица. В память о А.Гурвице многочлены, имеющие корни только в левой полуплоскости, стали называться гурвицевыми многочленами.

В настоящее время известны также и другие алгебраические критерии (критерий Соколова, критерий Льенара-Шипара), которые имеют меньшее число неравенств и более удобны при практических применениях.

Алгебраические критерии устойчивости применяются обычно для полиномов до 5 степени включительно, для полиномов более высоких степеней применяются частотные критерии, наиболее известными из которых являются критерий А.В.Михайлова и критерий Г.Найквиста.

**Алгебраический критерий устойчивости Рауса-Гурвица.** Критерий устойчивости (условие наличия в характеристическом уравнении САР только отрицательных корней, или комплексно-сопряженных корней с отрицательной вещественной частью) был сформулирован швейцарским математиком А. Гурвицем в 1895 году. Критерий связывает расположение корней характеристического полинома

$$D(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} + \dots + a_{n-2} p^2 + a_{n-1} p + a_n$$

с определенными условиями, накладываемыми на его коэффициенты  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ .

Для применения критерия необходимо из коэффициентов полинома составить матрицу Гурвица в следующем виде

$$H = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-2} & a_n \end{bmatrix}.$$

Матрица Гурвица составляется следующим образом. Диагональ матрицы заполняется по порядку коэффициентами полинома начиная с  $a_1$ . Первая строка матрицы Гурвица заполняется коэффициентами полинома, имеющими нечетные индексы, вторая строка – коэффициентами, имеющими четные индексы ( $a_0$  относится к коэффициентам, имеющим четные индексы), третья строка опять заполняется коэффициентами полинома, имеющими нечетные индексы и т.д. Свободные места в матрице заполняются нулями.

САР будет устойчива (в характеристическом полиноме будут все корни отрицательные, или отрицательной вещественной частью), если положительны все диагональные миноры, полученные из матрицы Гурвица

$$\Delta_1 = |a_1| > 0; \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} > 0; \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ a_1 & a_2 & a_4 \end{vmatrix} > 0; \dots; \Delta_n = a_n \Delta_{n-1} > 0.$$

Примеры.

1). Для характеристического полинома 2-й степени  $D(p) = a_0 p^2 + a_1 p + a_2$  условие Стодоль  $a_0 > 0, a_1 > 0, a_2 > 0$  является необходимым и достаточным.

2). Для характеристического полинома 3-й степени  $D(p) = a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3$  условие Стодоль  $a_0 > 0, a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0$  является необходимым, а необходимым и достаточным условием является  $a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0$ .

3). Для характеристического полинома 4-й степени  $D(p) = a_0 p^4 + a_1 p^3 + a_2 p^2 + a_3 p + a_4$  условие Стодоль  $a_0 > 0, a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0, a_4 > 0$  является необходимым, а необходимыми и достаточными условиями являются условия:  $a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0$  и  $a_3(a_1 a_2 - a_0 a_3) - a_1^2 a_4$ .

4). Для характеристического полинома 5-й степени  $D(p) = a_0 p^5 + a_1 p^4 + a_2 p^3 + a_3 p^2 + a_4 p + a_5$  условие Стодоль  $a_0 > 0, a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0, a_4 > 0, a_5 > 0$  является необходимым, а необходимыми и достаточными условиями являются условия:  $a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0, a_3(a_1 a_2 - a_0 a_3) + a_1(a_0 a_5 - a_1 a_4) > 0, (a_1 a_2 + a_0 a_3)(a_3 a_4 - a_2 a_5) + (a_1 a_4 + a_0 a_3)(a_0 a_5 - a_1 a_4) > 0$ .

### 5.1 Регулятор непрямого действия без обратной связи (РНД без ОС)

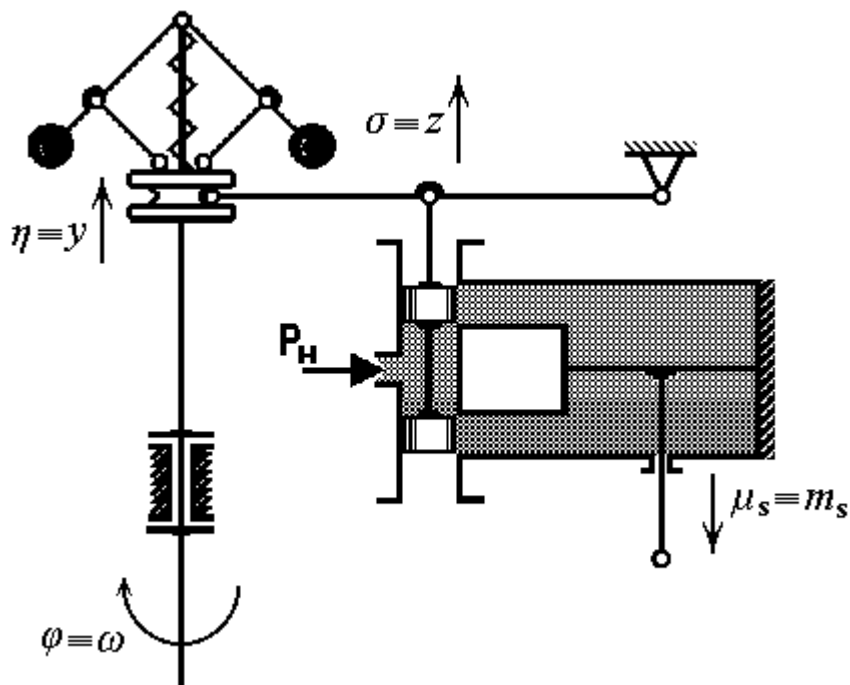


Рисунок 5.1 – Принципиальная схема РНД без ОС

Регулятор состоит из центробежного измерителя частоты вращения, гидравлического сервомотора с отсечным золотником и рычага, соединяющего муфту измерителя со штоком золотника.

Уравнения динамики (движений) РНД без ОС

$$\begin{cases} T_r^2 \ddot{\eta} + T_k \dot{\eta} + \gamma \eta = \varphi & - \text{уравнение измерителя}; \\ \sigma = \eta & - \text{уравнение связи измерителя с сервомотором}; \\ T_s \dot{\mu}_s = \sigma & - \text{уравнение сервомотора}. \end{cases} \quad (5.1)$$

После преобразования уравнений (5.1) по Лапласу (Pierre Simon Laplas, 1749 - 1827) динамику РНД без ОС можно представить в виде следующей структурной схемы

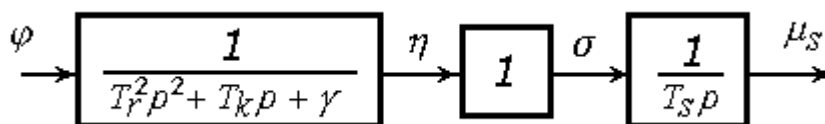


Рисунок 5.2 – Структурная схема РНД без ОС

Уравнения динамики РНД без ОС (5.1) можно представить в виде одного уравнения

$$T_r^2 T_s \ddot{\mu}_s + T_k T_s \dot{\mu}_s + \gamma T_s \mu_s = \varphi. \quad (5.2)$$

После преобразования по Лапласу уравнения (5.2) динамику РНД без ОС можно представить следующей структурной схемой.

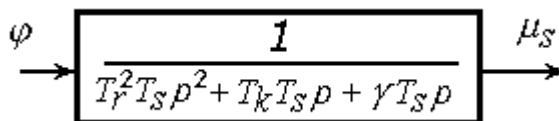


Рисунок 5.3 – Структурная схема РНД без ОС после преобразования

## 5.2 Регулятор непрямого действия с жесткой отрицательной обратной связью (РНД с ЖООС)

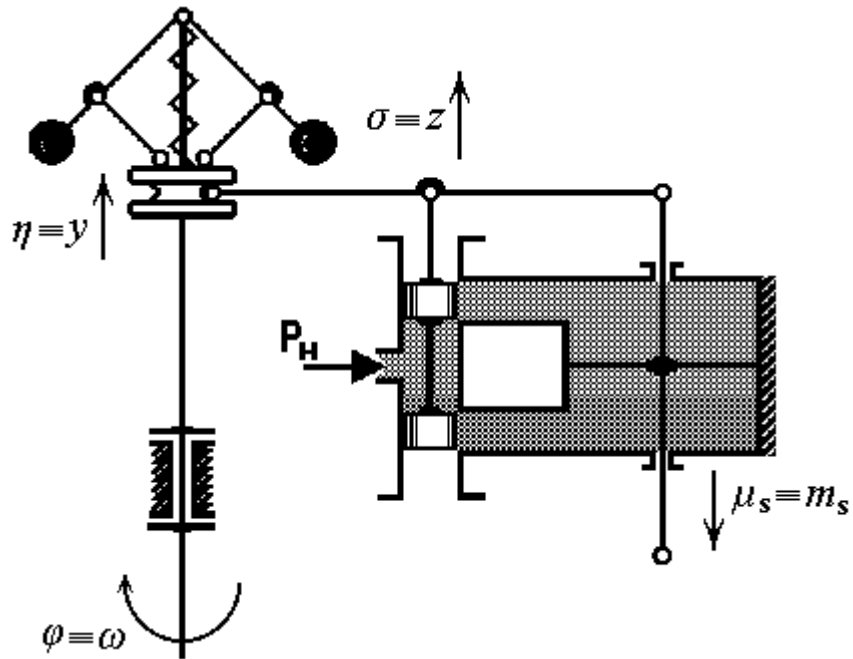


Рисунок 5.3 – Принципиальная схема РНД с ЖООС

Регулятор состоит из центробежного измерителя частоты вращения, гидравлического сервомотора с отсечным золотником и рычага, соединяющего муфту измерителя со штоком золотника и штоком сервомотора.

Уравнения динамики (движений) РНД с ЖООС

$$\begin{cases} T_r^2 \ddot{\eta} + T_k \dot{\eta} + \gamma \eta = \varphi & \text{— уравнение измерителя;} \\ \sigma = \eta - \mu_s & \text{— уравнение связи измерителя с сервомотором;} \\ T_s \dot{\mu}_s = \sigma & \text{— уравнение сервомотора.} \end{cases} \quad (5.3)$$

После преобразования уравнений (5.3) по Лапласу динамику РНД с ЖООС можно представить в виде следующей структурной схемы

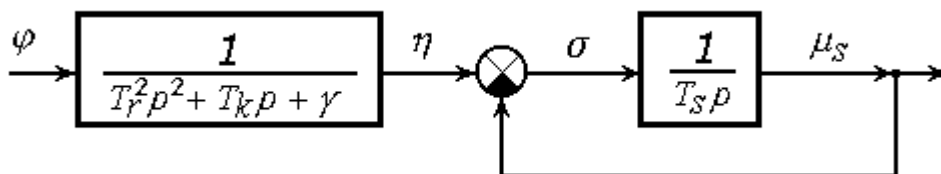


Рисунок 5.4 – Структурная схема РНД с ЖООС

Уравнения динамики РНД с ЖООС (5.3) можно представить в виде одного уравнения

$$T_r^2 T_s \ddot{\mu}_s + (T_r^2 + T_k T_s) \dot{\mu} + (T_k + \gamma T_s) \mu + \gamma \mu_s = \varphi. \quad (5.4)$$

После преобразования по Лапласу уравнения (5.4) динамику РНД с ЖООС можно представить следующей структурной схемой.

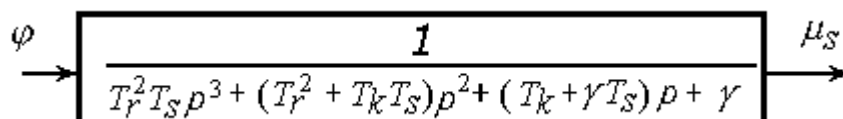


Рисунок 5.5 – Структурная схема РНД с ЖООС после преобразования

### 5.3 Регулятор непрямого действия с гибкой отрицательной обратной связью (РНД с ГООС)

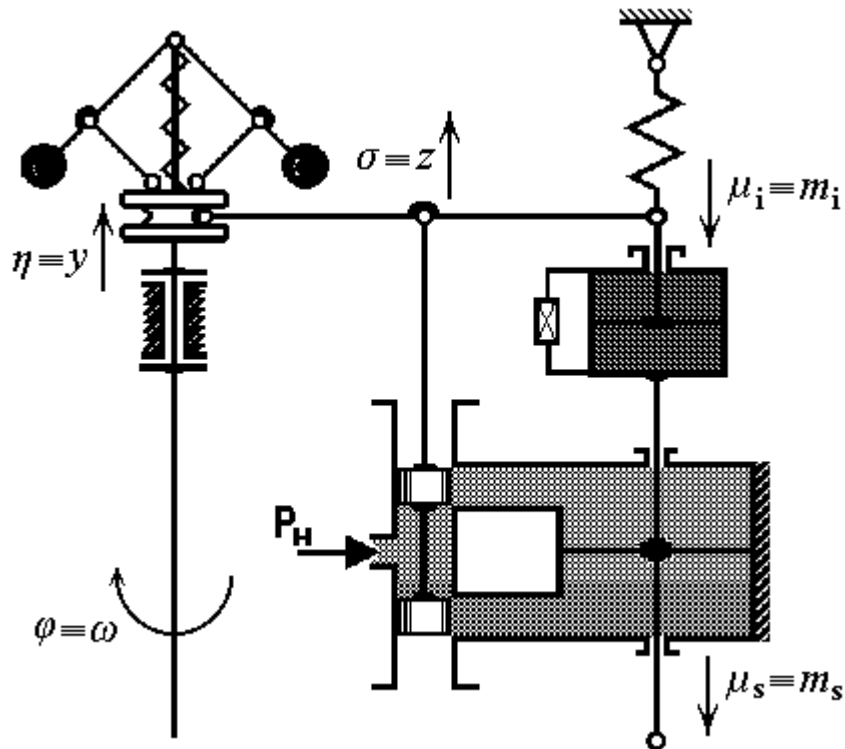


Рисунок 5.5– Принципиальная схема РНД с ГООС

Регулятор состоит из центробежного измерителя частоты вращения, гидравлического сервомотора с отсечным золотником, изодрома и рычага, соединяющего муфту измерителя со штоком изодрома.

Уравнения динамики (движений) РНД с ГООС

$$\begin{cases} T_r^2 \ddot{\eta} + T_k \dot{\eta} + \gamma \eta = \varphi - \text{уравнение измерителя}; \\ T_s \dot{\mu}_s = \sigma - \text{уравнение сервомотора}; \\ \sigma = \eta - \mu_i - \text{уравнение связи измерителя с изодромом}; \\ T_i \dot{\mu}_i + \mu_i = K_i \mu_s - \text{уравнение изодрома}. \end{cases} \quad (5.5)$$

После преобразования уравнений (5.5) по Лапласу динамику РНД с ГООС можно представить в виде следующей структурной схемы.

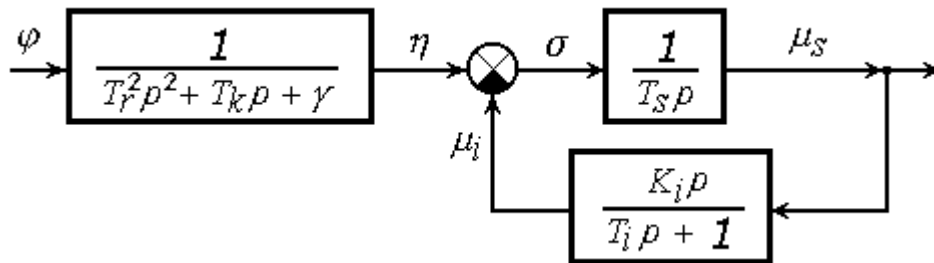


Рисунок 5.6– Структурная схема РНД с ГООС

Уравнения динамики РНД с ГООС (5.5) можно представить в виде одного уравнения

$$T_i T_r^2 T_s^{(4)} \mu_s + (T_s T_r^2 + T_i T_k T_s + k_i T_r^2) \ddot{\mu}_s + (\gamma T_i T_s + T_k T_s + k_i T_k) \dot{\mu}_s + (\gamma T_s + \gamma k_i) \mu_s = T_i \dot{\varphi} + \varphi. \quad (5.6)$$

После преобразования по Лапласу уравнения (5.6) динамику РНД с ГООС можно представить следующей структурной схемой

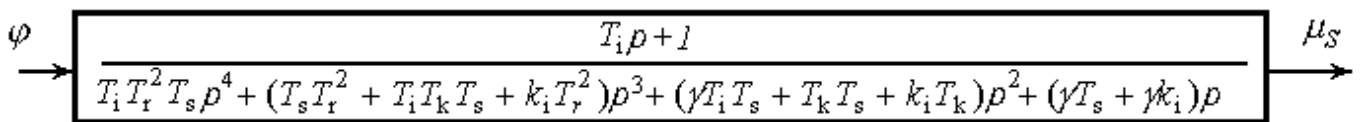


Рисунок 5.7 – Структурная схема РНД с ГООС после преобразования



### 5.4 Система автоматического регулирования (САР) частоты вращения турбины РНД без ОС

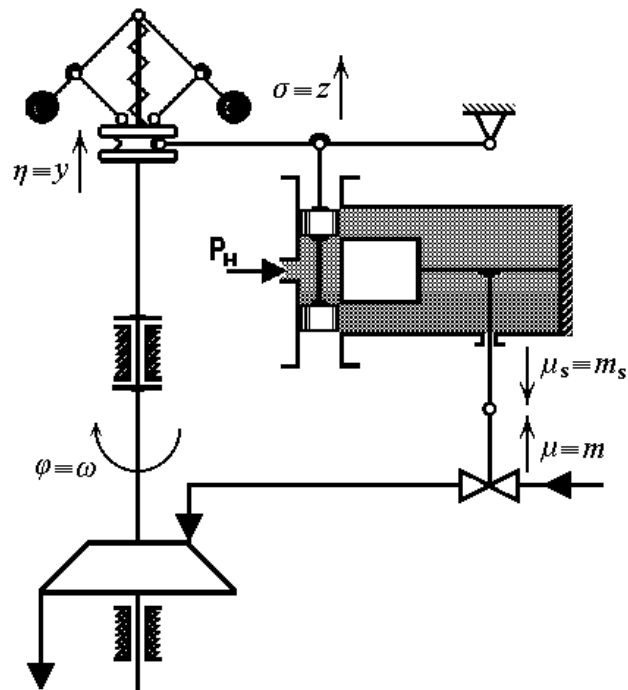


Рисунок 5.7 – Принципиальная схема САР частоты вращения турбины РНД без ОС

Уравнения динамики САР с РНД без ОС

$$\begin{cases} T_a \dot{\varphi} + \theta \varphi = \mu - f; \\ T_r^2 \ddot{\eta} + T_k \dot{\eta} + \gamma \eta = \varphi; \\ T_s \dot{\mu}_s = \sigma; \\ \sigma = \eta; \\ \mu = -\mu_s. \end{cases} \quad (5.7)$$

После преобразования уравнений (5.7) по Лапласу динамику САР с РНД без ОС можно представить в виде следующей структурной схемы

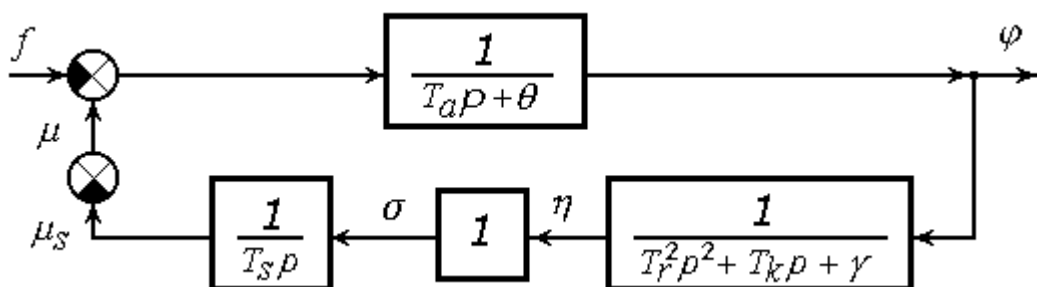


Рисунок 5.8 – Структурная схема регулирования частоты вращения турбины с РНД без ОС

Систему уравнений динамики (5.7) можно представить в виде одного дифференциального уравнения 4-го порядка относительно переменной  $\varphi(t)$

$$(4) \quad a_0 \varphi + a_1 \ddot{\varphi} + a_2 \dot{\varphi} + a_3 \varphi + a_4 \varphi = -b_0 \ddot{f} - b_1 \dot{f} - b_2 f, \quad (5.8)$$

где:

$$a_0 = T_a T_r^2 T_s, c^4; \quad a_1 = T_a T_k T_s + \theta T_r^2 T_s, c^3; \quad a_2 = \gamma T_k T_s + \theta T_a T_s, c^2; \quad a_3 = \gamma \theta T_s, c; \quad a_4 = 1. \\ b_0 = T_r^2 T_s, c^3; \quad b_1 = T_k T_s, c^2; \quad b_2 = \gamma T_s, c.$$

За входную переменную в выражении (5.8) принято относительное изменение нагрузки на турбину  $f(t)$ , за выходную переменную принято относительное изменение частоты вращения турбины  $\varphi(t)$ .

Устойчивость САР с уравнениями динамики (5.7), или уравнением (5.8), определяется по корням  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_4$  характеристического уравнения

$$a_0 \lambda^4 + a_1 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_3 \lambda^1 + a_4 \lambda^0 = 0. \quad (5.9)$$

САР устойчива, если все корни уравнения (5.9) являются отрицательными (или с отрицательной вещественной частью в случае наличия комплексно-сопряженных корней).

Согласно условия А.Стодолы и условий А.Гурвица САР будет устойчива, если

$$a_0 > 0, a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0, a_4 > 0 \text{ и } a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0, a_3(a_1 a_2 - a_0 a_3) - a_1^2 a_4 > 0.$$

После преобразования по Лапласу уравнение (5.8) можно представить следующей структурной схемой

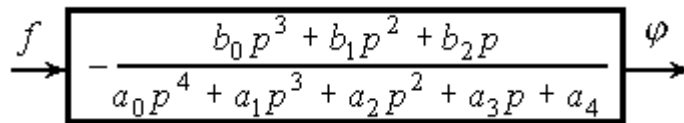


Рисунок 5.9 – Структурная схема 1

Систему уравнений динамики (5.7) можно представить в виде другого дифференциального уравнения 4-го порядка относительно переменной  $\eta(t)$

$$(4) \quad a_0 \eta + a_1 \ddot{\eta} + a_2 \dot{\eta} + a_3 \eta + a_4 \eta = -b_0 \dot{f}, \text{ где } b_0 = T_s, c. \quad (5.10)$$

После преобразования по Лапласу уравнение (5.10) можно представить следующей структурной схемой

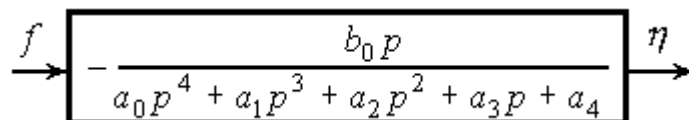


Рисунок 5.10 – Структурная схема 2

Систему уравнений динамики (5.7) можно представить в виде дифференциального уравнения 4-го порядка относительно переменной  $\mu(t)$

$$(4) \quad a_0 \mu + a_1 \ddot{\mu} + a_2 \dot{\mu} + a_3 \dot{\mu} + a_4 \mu = f. \quad (5.11)$$

После преобразования по Лапласу уравнение (5.11) можно представить следующей структурной схемой

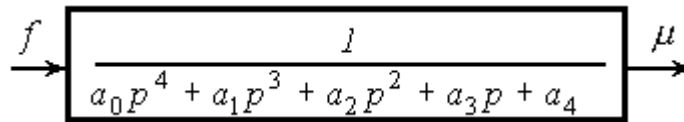


Рисунок 5.11 – Структурная схема 3

Выражение, заключенное в структурных схемах в прямоугольнике между входной переменной и выходной переменной, называется передаточной функцией  $W(p)$  и получается как отношение преобразованных по Лапласу выходной переменной к входной переменной при нулевых начальных условиях

$$W_1(p) = \frac{\varphi(p)}{f(p)} = - \frac{b_0 p^3 + b_1 p^2 + b_2 p}{a_0 p^4 + a_1 p^3 + a_2 p^2 + a_3 p + a_4};$$

$$W_2(p) = \frac{\eta(p)}{f(p)} = - \frac{b_0 p}{a_0 p^4 + a_1 p^3 + a_2 p^2 + a_3 p + a_4};$$

$$W_3(p) = \frac{\mu(p)}{f(p)} = \frac{1}{a_0 p^4 + a_1 p^3 + a_2 p^2 + a_3 p + a_4}.$$

В знаменателе передаточной функции находится характеристический полином вида (5.9).

## 5.5 Система автоматического регулирования (САР) частоты вращения турбины РНД с ЖООС

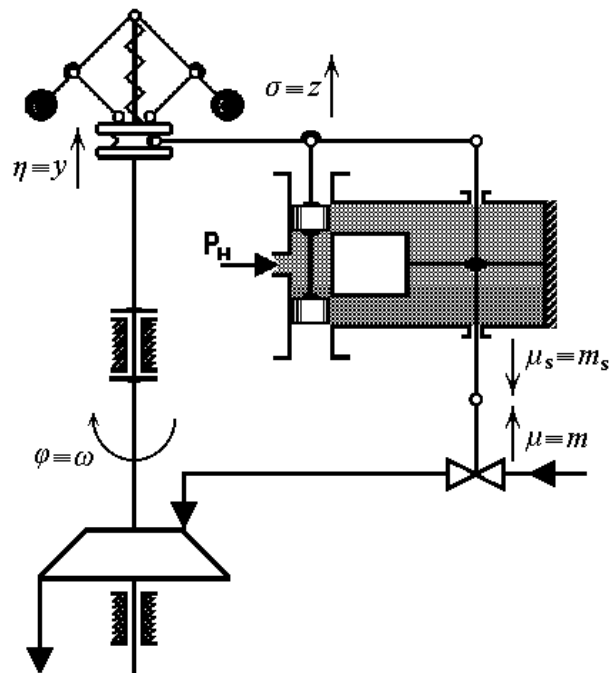


Рисунок 5.12 – Принципиальная схема регулирования частоты вращения турбины с РНД с ЖООС

Уравнения динамики САР с РНД с ЖООС

$$\begin{cases} T_a \dot{\varphi} + \theta \varphi = \mu - f; \\ T_r^2 \ddot{\eta} + T_k \dot{\eta} + \gamma \eta = \varphi; \\ T_s \dot{\mu}_s = \sigma; \\ \sigma = \eta - \mu_s; \\ \mu = -\mu_s. \end{cases} \quad (5.12)$$

По уравнениям системы (5.12) после преобразования их по Лапласу динамику САР с РНД с ЖООС можно представить следующей структурной схемой

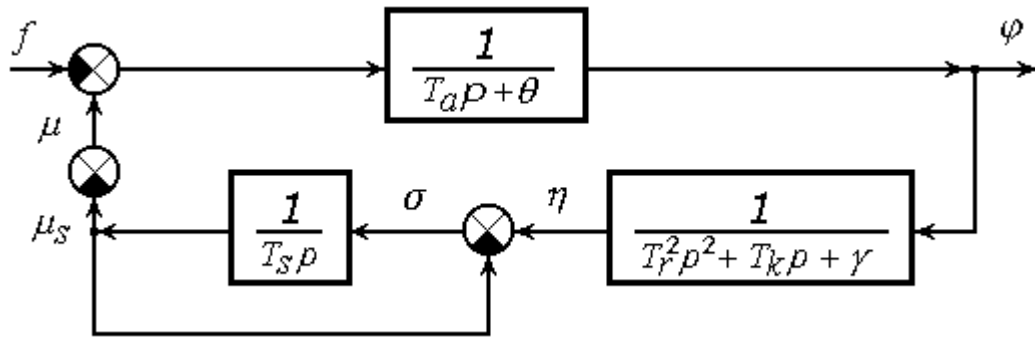


Рисунок 5.13 – Структурная схема регулирования частоты вращения турбины с РНД с ЖООС

Считая входной переменной переменную  $f(t)$ , а выходной переменной переменную  $\varphi(t)$ , систему уравнений динамики (5.7) можно представить в виде одного дифференциального уравнения 4-го порядка

$$(4) \quad a_0 \varphi + a_1 \ddot{\varphi} + a_2 \dot{\varphi} + a_3 \dot{\varphi} + a_4 \varphi = -b_0 \ddot{f} - b_1 \dot{f} - b_2 \dot{f} - b_3 f,$$

где:

$$\begin{aligned} a_0 &= T_a T_r^2 T_s, c^4; & b_0 &= T_r^2 T_s, c^3 \\ a_1 &= T_a T_k T_s + \theta T_r^2 T_s, c^3; & b_1 &= T_k T_s + T_r^2, c^2 \\ a_2 &= \gamma T_k T_s + \theta T_a T_s, c^2; & b_2 &= \gamma T_s + T_k, c \\ a_3 &= \gamma \theta T_s + \theta T_k + \gamma T_a, c; & b_3 &= \gamma. \\ a_4 &= 1 + \gamma \theta. \end{aligned}$$

Считая входной переменной переменную  $f(t)$ , а выходной переменной переменную  $\mu(t)$ , систему уравнений динамики (5.7) можно представить в виде дифференциального уравнения

$$(4) \quad a_0 \mu + a_1 \ddot{\mu} + a_2 \dot{\mu} + a_3 \dot{\mu} + a_4 \mu = f.$$

Система будет устойчивой, если для значений ее коэффициентов выполняются условия

$$a_0 > 0, a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0, a_4 > 0 \text{ и } a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0, a_3 (a_1 a_2 - a_0 a_3) - a_1^2 a_4 > 0.$$

## 5.6 Система автоматического регулирования (САР) частоты вращения турбины РНД с ГООС

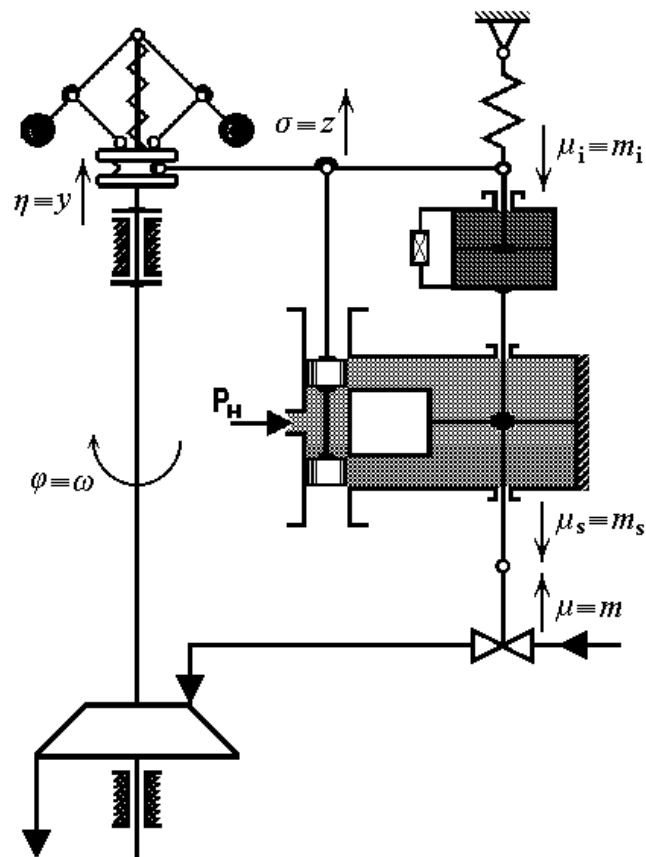


Рисунок 5 – Принципиальная схема регулирования частоты вращения турбины с РНД с ГООС

Уравнения динамики САР с РНД с ГООС

$$\begin{cases} T_a \dot{\varphi} + \theta \varphi = \mu - f; \\ T_r^2 \ddot{\eta} + T_k \dot{\eta} + \gamma \eta = \varphi; \\ T_s \dot{\mu}_s = \sigma; \\ \sigma = \eta - \mu_i; \\ T_i \dot{\mu}_i + \mu_i = K_i \dot{\mu}_s; \\ \mu = -\mu_s. \end{cases} \quad (5.13)$$

По уравнениям системы (5.13) после преобразования их по Лапласу динамику САР с РНД с ГООС можно представить следующей структурной схемой

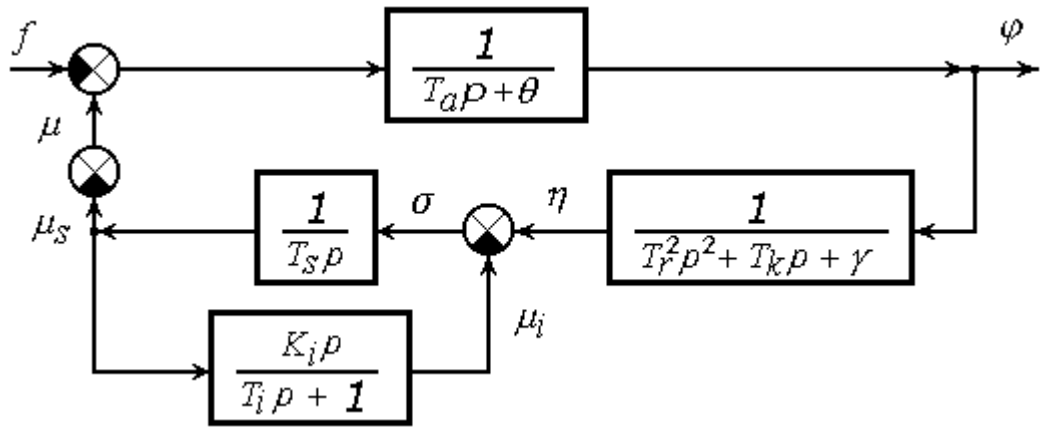


Рисунок 6 – Структурная схема регулирования частоты вращения турбины с РНД с ГООС

Считая входной переменной переменную  $f(t)$ , а выходной переменной переменную  $\varphi(t)$ , систему уравнений динамики (5.13) можно представить в виде одного дифференциального уравнения 5-го порядка

$$a_0 \overset{(5)}{\varphi} + a_1 \overset{(4)}{\varphi} + a_2 \ddot{\varphi} + a_3 \dot{\varphi} + a_4 \varphi + a_5 \varphi = -b_0 \overset{(4)}{f} - b_1 \ddot{f} - b_2 \dot{f} - b_3 f, \quad (5.14)$$

где:

$$a_0 = T_a T_r^2 T_s T_i, c^5;$$

$$b_0 = T_r^2 T_s T_i, c^4;$$

$$a_1 = T_a T_i T_s T_k + T_a T_s T_r^2 + \theta T_i T_s T_r^2, c^4;$$

$$b_1 = T_i T_k T_s + T_r^2 T_s, c^3;$$

$$a_2 = \gamma T_a T_i T_s + T_a T_s T_k + \theta T_i T_k T_s + \theta T_s T_r^2, c^3;$$

$$b_2 = \gamma T_i T_s + T_k T_s, c^2;$$

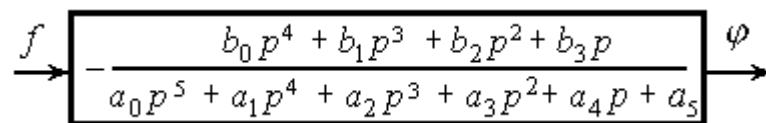
$$a_3 = \gamma T_a T_s + T_a K_i + \gamma \theta T_i T_s + \theta T_s T_k, c^2;$$

$$b_3 = \gamma (T_i + T_s), c.$$

$$a_4 = \gamma \theta T_s + \theta K_i + T_i, c;$$

$$a_5 = 1.$$

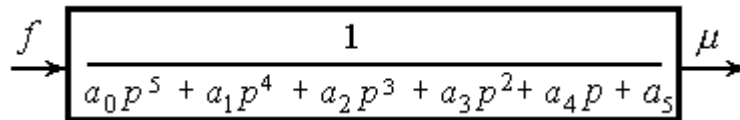
После преобразования по Лапласу уравнение (5.14) можно представить следующей структурной схемой



Считая входной переменной переменную  $f(t)$ , а выходной переменной переменную  $\mu(t)$ , систему уравнений динамики (5.13) можно представить в виде дифференциального уравнения 5-го порядка

$$a_0 \mu^{(5)} + a_1 \mu^{(4)} + a_2 \mu^{(3)} + a_3 \mu^{(2)} + a_4 \mu^{(1)} + a_5 \mu = f. \quad (5.15)$$

После преобразования по Лапласу уравнение (5.15) можно представить следующей структурной схемой



Устойчивость САР с РНД с ГООС (отсутствие в характеристическом полиноме нулевых корней и положительных корней, или комплексно-сопряженных корней с положительной вещественной частью) будет определяться выполнением следующих условий:

$$\begin{aligned} & a_0 > 0, a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0, a_4 > 0, a_5 > 0 \text{ и} \\ & a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0, a_3 (a_1 a_2 - a_0 a_3) + a_1 (a_0 a_5 - a_1 a_4) > 0, \\ & (a_1 a_2 + a_0 a_3)(a_3 a_4 - a_2 a_5) + (a_1 a_4 + a_0 a_3)(a_0 a_5 - a_1 a_4) > 0. \end{aligned}$$