

Тема: «Появление теории автоматического регулирования (ТАР)

**Работы Д.-К. Максвелла, И.А.Вышнеградского, А.Стодолы,
заложивших основу ТАР**

**Лекция 3 – Работа Ивана Алексеевича Вышнеградского
«О регуляторах прямого действия» (1876)**



И. А. Вышнеградский (1831—1895)

Иван Алексеевич Вышнеградский родился 20 декабря 1831 г. в городе Вышний Волочок Тверской губернии в семье священника, в 1843 г. поступил в Тверскую духовную семинарию, в 1846 г. переехал в Петербург и поступил на физико-математический факультет Главного педагогического института.

В 1851г. И.А. Вышнеградский окончил физико-математический факультет Главного педагогического института с серебряной медалью и со званием старшего учителя и был назначен преподавателем математики во 2-й Петербургский кадетский корпус.

С 1851 по 1854 г. И. А. Вышнеградский одновременно с преподаванием в кадетском корпусе систематически совершенствует свои знания в области математики и аналитической механи-

ки под руководством М. В. Остроградского. Он успешно сдает магистерские экзамены и в 1854 г. защищает в Санкт-Петербургском университете диссертацию на степень магистра математических наук: «О движении системы материальных точек, определяемой полными дифференциальными уравнениями». Официальными оппонентами при защите диссертации были П. Л. Чебышев и О. И. Сомов.

В 1854 г. И.А.Вышнеградский по рекомендации М.В.Остроградского получил место преподавателя математики в Михайловском артиллерийском училище, которое в последующем (с 1855 года) преобразовывается в высшее учебное заведение - Михайловскую артиллерийскую академию. Преподавательская деятельность в артиллерийских учебных заведениях, общение с артиллеристами и военными инженерами, Крымская война, обнаружившая необходимость модернизации стрелкового оружия и артиллерии, оказали существенное влияние на направление научных интересов И. А. Вышнеградского.

В 1858 г. ему поручают чтение лекций по прикладной механике, и в том же году он командировается Академией в Киев, Шостку и Брянск для детального ознакомления с заводами артиллерийского ведомства. С этого времени деятельность И. А. Вышнеградского получает отчетливое прикладное направление. Он преподает различные отделы прикладной механики, ведет курсы проектирование механизмов и выступает как конструктор и инженер-практик.

В 1859 г. Михайловская артиллерийская академия предоставляет И. А. Вышнеградскому длительную заграничную командировку для подготовки к званию профессора «практической механики». К своему отъезду за границу И. А. Вышнеградский уже имел ряд опубликованных научных работ и серьезный практический инженерный опыт.

И. А. Вышнеградский начал свою заграничную командировку с Гейдельберга, где он слушал лекции по теоретической и экспериментальной физике у знаменитого Кирхгофа и лекции по математике у Гессе и Кенигсбергера. Затем он провел около года в Политехническом институте города Карлсруэ, где тогда работал один из основоположников научного машиностроения Редтенбахер, виднейший математик и специалист в области теории упругости Клебш.

По возвращении в 1862 г. в Россию И. А. Вышнеградский был утвержден профессором практической механики Михайловской артиллерийской академии, а вскоре и профессором механики Санкт-Петербургского технологического института.

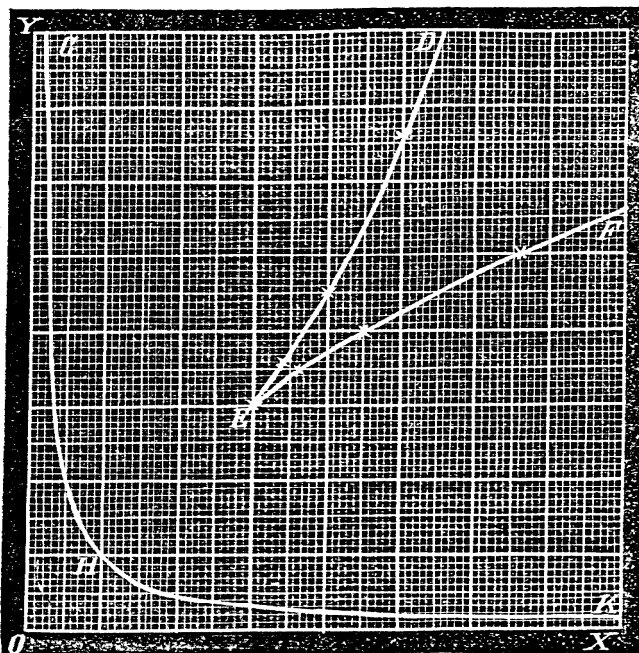
В обоих этих учебных заведениях он развернул интенсивную профессорскую деятельность. Он читал различные курсы по машиностроению и машиноведению и по смежным научным дисциплинам, а также вел курсовое и дипломное проектирование. Он воспитал целое поколение русских инженеров-машиностроителей, был главой первой русской школы в области машиностроения.

Работы по регулированию, которые прославили его имя, были опубликованы в 1877—1878 гг. в «Известиях Технологического Института» - издании, которое было основано самим И.А.Вышнеградским для печатания работ по различным приложениям науки и техники. Наиболее важной из них явилась работа «О регуляторах прямого действия» (1876), давшая ответ на жизненно важные вопросы практики регуляторостроения и устойчивости паровых машин.

Фрагмент первого издания работы «О регуляторах прямого действия»

18

И. Вышнеградский.



Строя эту кривую легко убедиться, что она имеет две ветви, проходящая через общую точку $(x = z, y = z)$, и имеющие в этой точке общую касательную, наклоненную к осям координат под углом в 45° , что одна из этих ветвей обращает вогнутость к оси X , и простираясь в бесконечность мало по малу уменьшает свое наклонение к этой оси, а другая обращает свою вогнутость к оси Y , и простираясь в бесконечность мало по малу уменьшает свое наклонение к оси Y . Часть этой кривой DEF , построенная по точкам, изображена на приложенном чертеже.

Съ помощью ея, вычисливъ для каждаго даннаго регулятора величины x и y , легко найти, будетъ ли этотъ регуляторъ, выведенный измѣненіемъ сопротивленія изъ нормальнаго равновѣснаго положенія, имѣть движеніе не соединенное съ колебаніями, или же движеніе его будетъ состоять изъ колебаній.

В своей работе «О регуляторах прямого действия» (1876), Вышнеградский применил тот же математический прием описания динамики, что и Максвелл - заменил все сложные зависимости между определяющими поведение системы переменными простой пропорциональностью. В отличие от Максвелла он не стал учитывать при описании динамики свойство (ввиду его незначительности) паровой машины к саморегулированию (принял $\theta = 0$), а за регулирующее устройство принял статический регулятор Уатта (условная принципиальная схема регулирования частоты вращения с помощью регулятора Уатта представлена на рисунке 3.1).

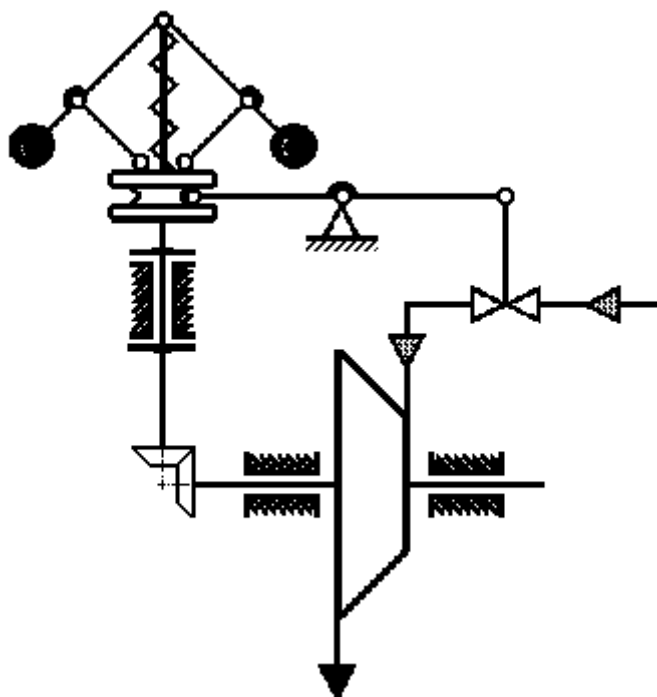


Рисунок 3.1 - Условная схема регулирования частоты вращения паровой машины с помощью регулятора Уатта

В результате Вышнеградский пришел к следующим уравнениям, описывающим динамику системы автоматического регулирования «машина-статический регулятор»:

$$T_a \dot{\varphi} = \mu - f, \quad T_r^2 \ddot{\mu}_r + T_k \dot{\mu}_r + \gamma \mu_r = \varphi, \quad \mu = -\mu_r. \quad (3.1)$$

Здесь также первое уравнение определяет динамику машины-двигателя (без саморегулируемости), второе - динамику статического регулятора.

В описании (3.1) значение положительного коэффициента γ соответствует статической погрешности регулятора (характеризует меру неспособности регулятора поддерживать частоту

вращения идеально постоянной во всем диапазоне изменения нагрузки). В дальнейшем коэффициент стали называть коэффициентом неравномерности (для астатического регулятора $\gamma = 0$).

Структурная модель системы (3.1) представлена на рисунке 3.2.

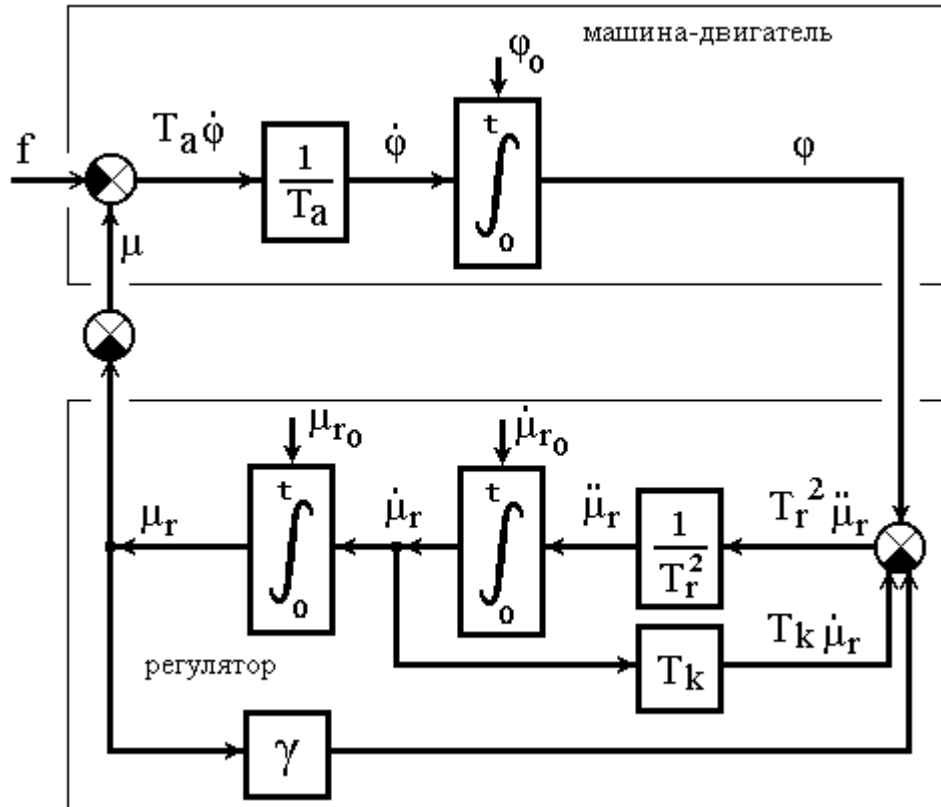


Рисунок 3.2 - Структурная математическая модель системы:
машина-двигатель, управляемая статическим регулятором

При совместном решении уравнений (3.1) относительно ϕ или μ динамика (движения) системы автоматического регулирования «машина-статический регулятор» описывается линейным дифференциальным уравнением третьего порядка:

а) относительно переменной ϕ

$$T_r^2 T_a \ddot{\phi} + T_k T_a \dot{\phi} + T_a \gamma \dot{\phi} + \phi = -T_r^2 \ddot{f} - T_k \dot{f} - \gamma f, \quad (3.2)$$

б) относительно переменной μ

$$T_r^2 T_a \ddot{\mu} + T_k T_a \dot{\mu} + T_a \gamma \dot{\mu} + \mu = f. \quad (3.3)$$

В структурном виде описание (3.3) представлено на рисунке 3.3.

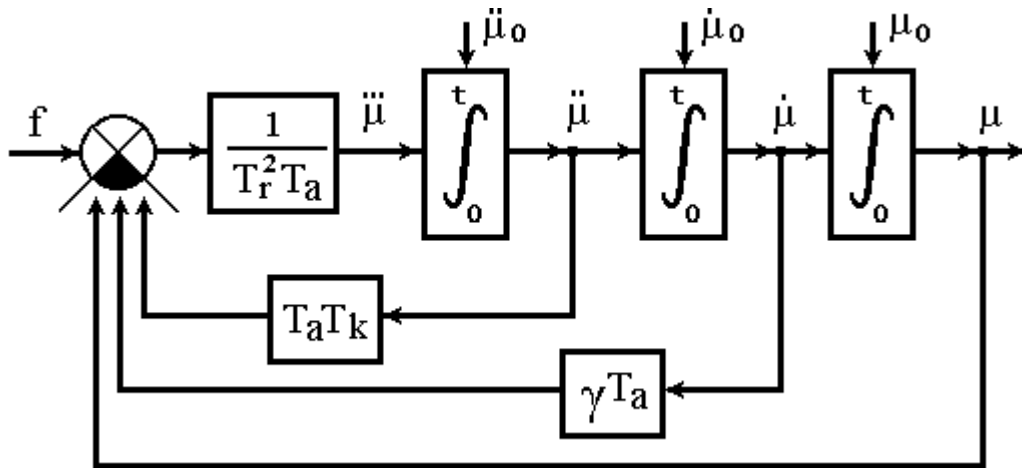


Рисунок 3.3 - Структурная математическая модель системы: машина-двигатель, управляемая статическим регулятором

Одно уравнение состояний равновесия системы автоматического регулирования можно получить из (3.2) при $\ddot{\varphi} = \dot{\varphi} = 0$, $\ddot{f} = \dot{f} = 0$

$$\varphi = -\gamma f, \quad (3.4)$$

второе уравнение состояний равновесия системы автоматического регулирования можно получить из (3.3) при $\ddot{\mu} = \dot{\mu} = 0$

$$\mu = f. \quad (3.5)$$

Характеристическое уравнение системы определяется выражением:

$$T_r^2 T_a \lambda^3 + T_k T_a \lambda^2 + T_a \gamma \lambda + 1 = 0. \quad (3.6)$$

За условие устойчивости состояний равновесия (также, как и в работе Максвелла) было принято условие отрицательности корней (отрицательности вещественных частей корней) уравнения (3.6). Таким условием стало неравенство

$$\gamma T_a T_k > T_r^2. \quad (3.7)$$

Полученное условие (3.7) легко объяснило причину «бунта» машин. Ведь совершенствование паровых машин, повышение их мощности и числа оборотов сопровождалось облегчением ма-

ховика (уменьшением коэффициента T_a), желание повысить точность (приблизить работу статического регулятора к астатическому) сопровождалось уменьшением неравномерности (уменьшением коэффициента γ) и, как следствие, к увеличению массы подвижных частей регулятора (увеличению коэффициента T_r^2). Оставался последний коэффициент (T_k), с помощью которого можно было выполнить неравенство (3.7), однако для этого требовалось применение катаракта - особого устройства, порождающего вязкое трение в регуляторе (увеличение коэффициента T_k).

Анализируя полученное им неравенство, Вышнеградский сформулировал свои знаменитые тезисы:

- 1) без неравномерности (коэффициент $\gamma = 0$) нет регулятора;
- 2) без катаракта (коэффициент $T_k = 0$) нет регулятора.

Формулировка первого тезиса соответствовала тому, что астатический регулятор ($\gamma = 0$) непригоден для регулирования машин, лишенных свойства саморегулируемости ($\theta = 0$). Вторым тезис означал, что всякий чувствительный (сухое трение отсутствует) регулятор обязательно должен иметь катаракт - устройство, обеспечивающее $T_k > 0$ (представлено на рисунке 3.3).

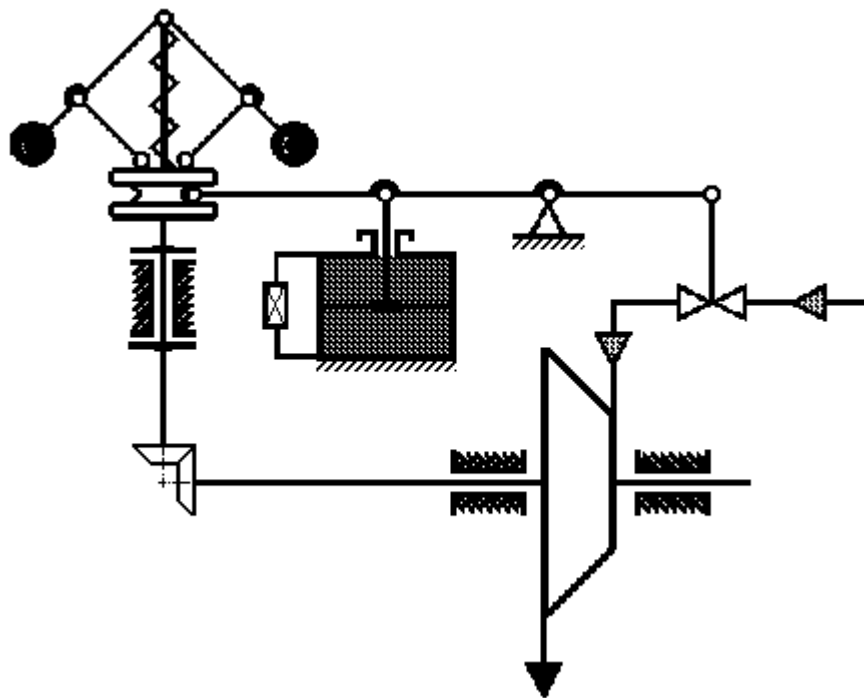


Рисунок 3.4 – Условная схема регулирования частоты вращения паровой машины регулятором Уатта, снабженным дополнительным устройством - катарактом

Сравнение результатов, полученных Максвеллом и Вышнеградским. Как уже говорилось, к середине XIX века, в связи с ростом мощности и быстроходности паровых машин, все

чаще стала проявляться склонность машин к неустойчивой работе (самораскачиванию). Статические, центробежные регуляторы Уатта, уверенно обеспечивающие надежную работу машин меньшей мощности, оказались для мощных машин по непонятным причинам малопригодными.

Статья Максвелла «О регуляторах» стала первой успешной попыткой математического осмысления работы системы «машина-регулятор». Впервые теоретически была исследована, с позиций динамики, работа машины-двигателя, снабженной регулятором частоты вращения, и выяснены причины возникновения неустойчивости. За условие устойчивости системы было принято условие отрицательности корней (отрицательности вещественных частей корней) характеристического уравнения 3-го порядка.

Однако, рекомендация Максвелла использовать для регулирования частоты вращения астатические регуляторы ($\gamma = 0$) требовала наличия у машины-двигателя существенно-го свойства к саморегулированию ($\theta \gg 0$). Поскольку в рассматриваемый период основным двигателем являлась паровая машина, свойство саморегулирования у которой выражено очень слабо ($\theta \approx 0$), выводы работы не получили практического применения.

И.А.Вышнеградский подошел к делу иначе - не только как математик, а в большей степени как инженер-практик. Свои работы он посвятил насущной проблеме – регулированию паровой машины, снабженной статическим регулятором Уатта.

Полученная Вышнеградским компактная формула (3.7), показала, почему регуляторы Уатта перестали надежно работать. Машины, которые строил сам Уатт, были машинами низкого давления, маломощными, с большими маховиками (существенное значение коэффициента T_a), обеспечивающим плавное вращение тихоходных машин того времени, а регуляторы работали с неравномерностью ($\gamma > 0$), т.е. число оборотов при различной нагрузке на машину было различным. Это обеспечивало устойчивую работу машин (условие 3.7).

Развитие техники выдвинуло повышенные требования к точности регулирования, для чего пришлось уменьшать коэффициент неравномерности регулятора ($\gamma \rightarrow 0$). Увеличение быстроходности машин делало ненужным использование дополнительного маховика (уменьшение коэффициента T_a), а увеличение мощности машин потребовало больших усилий для перемещения заслонки, что требовало увеличения массы грузов регулятора (увеличение коэффициента T_r^2). Все это с неизбежностью вело к неустойчивости (смотри условие 3.7). Лишь после того, как это обстоятельство было выяснено Вышнеградским, стало возможно целенаправленно бороться с неустойчивостью (самораскачиванием).

Вышнеградский первым дает наглядную геометрическую интерпретацию полученных условий устойчивости (3.7) - отрицательности корней характеристического уравнения (3.6). Для

придания наглядности своим выводам (сокращения числа коэффициентов в левых частях уравнений (3.2), (3.3) Вышнеградский использует оригинальный способ приведения коэффициента при старшей производной в уравнениях (3.2), (3.3) к единице.

Так, например, взяв первое слагаемое в уравнении (3.3) и применив несложные преобразования

$$T_r^2 T_a \frac{d^3 \mu}{dt^3} = \frac{d^3 \mu}{\frac{1}{T_r^2 T_a} dt^3} = \frac{d^3 \mu}{d \left[\frac{t}{\sqrt[3]{T_r^2 T_a}} \right]^3},$$

можно реальное время t заменить на другое (безразмерное) время τ . При этом реальное время t с «новым» временем τ будут связаны зависимостью $\tau = \frac{t}{\sqrt[3]{T_r^2 T_a}}$, $t = \tau \sqrt[3]{T_r^2 T_a}$.

Примечание. Такой прием называется масштабированием времени, используется для сокращения числа коэффициентов в уравнениях динамики.

Заменив в левой части, например, уравнения (3.3) реальное время t на «новое» время τ , можно получить (при $f = 0$) следующее уравнение динамики (уравнение свободных движений в системе).

$$\frac{d^3 \mu}{d\tau^3} + \frac{T_k}{T_r} \sqrt[3]{\frac{T_a}{T_r}} \frac{d^2 \mu}{d\tau^2} + \gamma \sqrt[3]{\frac{T_a^2}{T_r^2}} + 1 = 0. \quad (3.8)$$

Обозначив соответственно $X = \frac{T_k}{T_r} \sqrt[3]{\frac{T_a}{T_r}}$ и $Y = \gamma \sqrt[3]{\frac{T_a^2}{T_r^2}}$ получим характеристическое

уравнение (3.7) в следующем виде

$$\lambda^3 + X\lambda^2 + Y\lambda + 1 = 0, \quad (3.9)$$

где X, Y - обобщенные безразмерные положительные параметры (получившие впоследствии название параметров Вышнеградского).

При новых параметрах условие устойчивости (3.7) принимает вид

$$XY > 1. \quad (3.10)$$

а уравнение $XY = 1$ (названное впоследствии гиперболой Вышнеградского) отделяет на плоскости параметров X, Y область значений параметров, соответствующих устойчивой работе системы от области, где имеет место неустойчивость (представлено на рисунке 3.5, где гипербола обозначена буквами GHK).

Анализируя формулу Кардано, Вышнеградский идет дальше, чем получение условий устойчивости и решает уже вопрос качества регулирования, получая внутри области устойчивости области различного качества регулирования.

Примечание. Имя Иеронима Кардано (Geloramo Cardano, 1501 - 1576) связано с другим именем итальянского математика Сципиона (Тарталья), который с 1535 года владел умением находить корни кубического уравнения, но метод нахождения корней держал в тайне. Наконец, он раскрыл свой метод И. Кардано, но взял с него клятву сохранить метод в тайне. В 1545 г. Кардано опубликовал под своим именем книгу по алгебре «Великое искусство», в которой (с должным признанием заслуг автора метода - Тарталья) был описан метод нахождения корней кубического уравнения. В результате судебных разбирательств и публичных взаимных оскорблений метод получил широкое распространение и известен в настоящее время как метод Кардано (формула Кардано). Защищавший Кардано на суде молодой математик Людовико Феррари впоследствии на основе метода Кардано нашел метод нахождения корней для уравнения 4-й степени, известный в настоящее время как метод Феррари (формула Феррари).

Внутри области $XY > 1$ Вышнеградский определяет область вещественности всех трех корней (наилучшее качество регулирования).

$$X^2Y^2 - 4(X^3 + Y^3) + 18XY - 27 \geq 0. \quad (3.11)$$

Область, соответствующая (3.11) ограничена линией DEF (представлено на рисунке 3.5).

В следующей своей работе, опубликованной на немецком языке, Вышнеградский дополнил свои исследования в области устойчивости, разделив ее граничной линией

$$2X^3 - 9XY + 27 = 0, \text{ при } X < 3 \quad (3.11)$$

на две подобласти (рисунок 3.5) – подобласть с малой колебательностью (область, ограниченная кривой GED и соответствует расположению корней, когда вещественный корень по отношению к паре комплексно сопряженных корней находится ближе к оси) и подобласть с существенной колебательностью (область, ограниченная кривой GEF и гиперболой GHK соответствует расположению корней, когда пара комплексно сопряженных корней по отношению к вещественному корню находится ближе к оси).

Как видим и Максвелл и Вышнеградский вопрос об устойчивости паровой машины с регулятором свели к решению кубического алгебраического уравнения третьей степени, для решения которого формула - формула Кардано (Gerolamo Cardano, 1501 - 1576) - была известна еще в начале 16-го века.

Однако только Вышнеградский на основе этой формулы добился замечательных результатов, дав им наглядную геометрическую интерпретацию в виде, известной теперь всему миру диаграммы, носящей его имя.

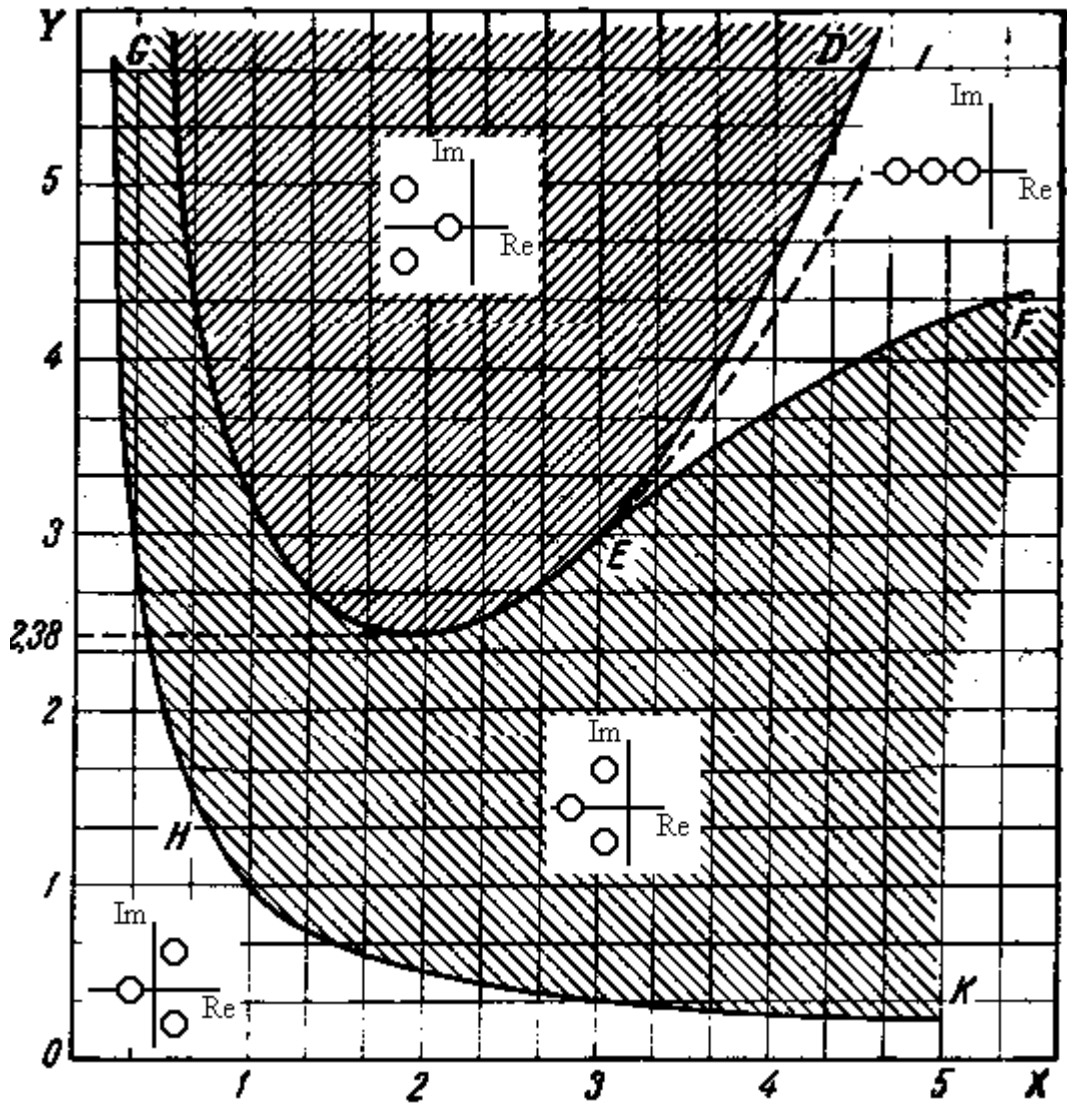


Рисунок 3.5 - Диаграмма И.А.Вышнеградского