К лабораторной работе №4

«МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ РЕГУЛЯТОРА Д. УАТТА»

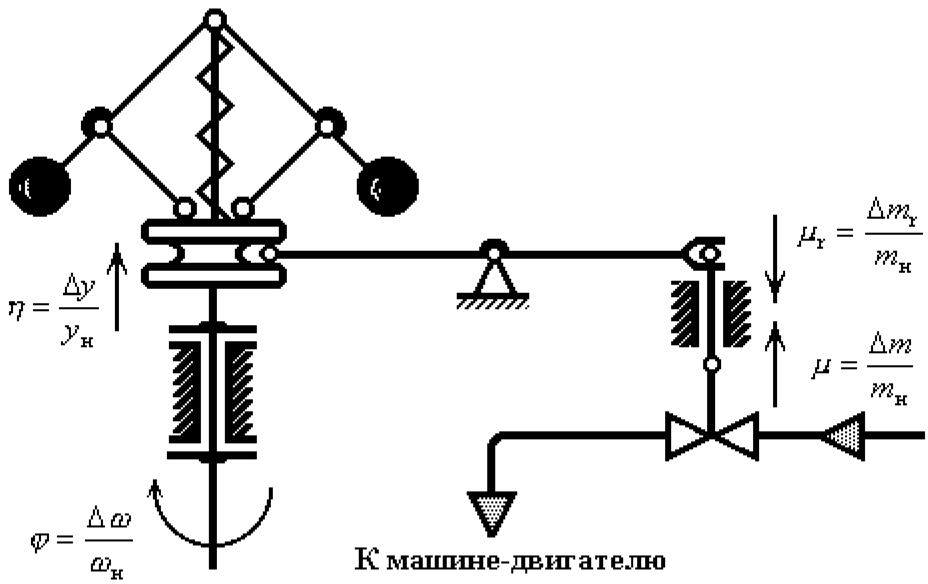

Рисунок 4.1 – Принципиальная схема регулятора Д.Уатта

Математической моделью регулятора является следующее дифференциальное уравнение

$$T_r^2 \ddot{\mu}_r + T_k \dot{\mu}_r + \gamma \mu_r = \varphi . \tag{4.1}$$

Математическую модель регулятора можно представить другим математическим выражением

$$\ddot{\mu}_r = -\frac{T_k}{T_r^2} \dot{\mu}_r - \frac{\gamma}{T_r^2} \mu + \frac{1}{T_r^2} \varphi, \frac{1}{c^2} . \tag{4.2}$$

Математическую модель регулятора можно также представить в виде следующей структуры (представлено на рисунке 4.2).

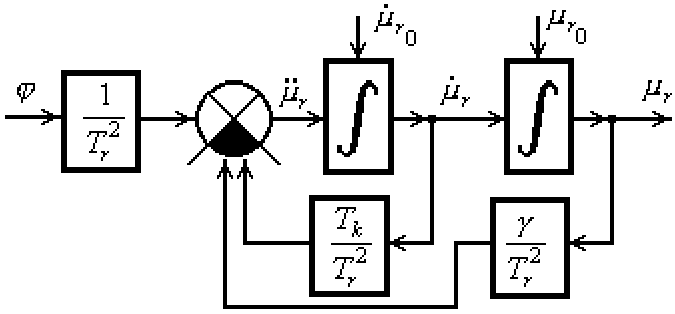

Рисунок 4.2 – Структурная математическая модель регулятора Д.Уатта

Характеристическим уравнением для (4.1) является следующее уравнение

$$T_r^2\lambda^2 + T_k\lambda + \gamma = 0\,. \tag{4.3}$$

Корни характеристического уравнения (4.3) определяются выражением

$$\lambda_{1,2} = \frac{-T_\text{k} \pm \sqrt{T_\text{k}^2 - 4\gamma T_\text{r}^2}}{2T_\text{r}^2},\ \frac{1}{c}\,. \tag{4.4}$$

Получим уравнение возмущенного движения регулятора Д.Уатта при $\mu_\text{r}(0) = \mu_{\text{r}0}$, $\dot{\mu}_\text{r}(0) = \dot{\mu}_{\text{r}0}$ и $\varphi(t) = \varphi_0 = Const$.

а) корни характеристического уравнения при $T_\text{k}^2 - 4\gamma T_\text{r}^2 > 0$ являются действительными отрицательными -

$$\lambda_1 = \frac{-T_\text{k} + \sqrt{T_\text{k}^2 - 4\gamma T_\text{r}^2}}{2T_\text{r}^2},\ \frac{1}{c};\quad \lambda_2 = \frac{-T_\text{k} - \sqrt{T_\text{k}^2 - 4\gamma T_\text{r}^2}}{2T_\text{r}^2},\ \frac{1}{c}. \tag{4.5}$$

$$\begin{gathered} \mu(t) = C_1 e^{\lambda_1 \cdot t} + C_2 e^{\lambda_2 \cdot t} + \frac{\varphi_0}{\gamma}; \\ \dot{\mu}(t) = \lambda_1 C_1 e^{\lambda_1 \cdot t} + \lambda_2 C_2 e^{\lambda_2 \cdot t},\ \frac{1}{c} \end{gathered} \tag{4.6}$$

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 определим из следующей системы уравнений, полученных из (4.6) при $t = 0$

$$\begin{cases} \mu_0 - \dfrac{\varphi_0}{\gamma} = C_1 + C_2; \\ \dot{\mu}_0 = \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2, \end{cases} \tag{4.7}$$

в соответствии с правилом Крамера при $\lambda_1 \neq \lambda_2$, как

$$C_1 = \frac{\begin{vmatrix} \mu_0 - \dfrac{\varphi_0}{\gamma} & 1 \\ \dot{\mu}_0 & \lambda_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{vmatrix}} = \frac{\left(\mu_0 - \dfrac{\varphi_0}{\gamma}\right)\lambda_2 - \dot{\mu}_0}{\lambda_2 - \lambda_1};\ C_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \mu_0 - \dfrac{\varphi_0}{\gamma} \\ \lambda_1 & \dot{\mu}_0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{vmatrix}} = \frac{\dot{\mu}_0 - \left(\mu_0 - \dfrac{\varphi_0}{\gamma}\right)\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}. \qquad (4.8)$$

Подставим постоянные интегрирования (4.8) в (4.6) и окончательно получим уравнения возмущенного движения

$$\mu(t) = \frac{\left(\mu_0 - \dfrac{\varphi_0}{\gamma}\right)\lambda_2 - \dot{\mu}_0}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{\lambda_1 t} + \frac{\dot{\mu}_0 - \left(\mu_0 - \dfrac{\varphi_0}{\gamma}\right)\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{\lambda_2 t} + \frac{\varphi_0}{\gamma};$$

$$(4.9)$$

$$\dot{\mu}(t) = \lambda_1 \frac{\left(\mu_0 - \dfrac{\varphi_0}{\gamma}\right)\lambda_2 - \dot{\mu}_0}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{\lambda_1 t} + \lambda_2 \frac{\dot{\mu}_0 - \left(\mu_0 - \dfrac{\varphi_0}{\gamma}\right)\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{\lambda_2 t},\ \frac{1}{c}.$$

б) корни характеристического уравнения при $T_{\text{k}}^2 - 4\gamma T_{\text{г}}^2 < 0$ являются комплексными сопряженными с отрицательной вещественной частью -

$$\lambda_{1,2} = \beta \pm j\omega,\ \frac{1}{c},\ \text{где}\ \beta = -\frac{T_{\text{k}}}{2T_{\text{г}}^2},\ \frac{1}{c};\ \ \omega = \frac{\sqrt{T_{\text{k}}^2 - 4\gamma T_{\text{г}}^2}}{2T_{\text{г}}^2},\ \frac{1}{c}. \qquad (4.10)$$

$$\mu(t) = e^{\beta \cdot t}\left[C_1 Cos(\omega \cdot t) + C_2 Sin(\omega \cdot t)\right] + \frac{\varphi_0}{\gamma};$$

$$(4.11)$$

$$\dot{\mu}(t) = e^{\beta \cdot t}\{\beta\left[C_1 Cos(\omega \cdot t) + C_2 Sin(\omega \cdot t)\right] + \omega\left[C_2 Cos(\omega \cdot t) - C_1 Sin(\omega \cdot t)\right]\},\ \frac{1}{c}.$$

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 определим из системы уравнений, полученных из (4.11) при $t = 0$

$$\begin{cases} \mu_0 - \dfrac{\varphi_0}{\gamma} = C_1; \\ \\ \dot{\mu}_0 = \beta C_1 + \omega C_2,\ \dfrac{1}{c} \end{cases} \qquad (4.12)$$

соответственно как:

$$C_1 = \mu_0 - \frac{\varphi_0}{\gamma}, \;\; C_2 = \frac{\dot{\mu}_0}{\omega} - \frac{\beta}{\omega}\left(\mu_0 - \frac{\varphi_0}{\gamma}\right). \tag{4.13}$$

Подставим постоянные интегрирования (4.13) в (4.11) и окончательно получим уравнения возмущенного движения

$$\mu(t) = e^{\beta \cdot t}\left\{\left(\mu_0 - \frac{\varphi_0}{\gamma}\right)Cos(\omega \cdot t) + \left[\frac{\dot{\mu}_0}{\omega} - \frac{\beta}{\omega}\left(\mu_0 - \frac{\varphi_0}{\gamma}\right)\right]Sin(\omega \cdot t)\right\} + \frac{\varphi_0}{\gamma};$$

$$\dot{\mu}(t) = e^{\beta \cdot t}\left\{\beta\left[\left(\mu_0 - \frac{\varphi_0}{\gamma}\right)Cos(\omega \cdot t) + \left[\frac{\dot{\mu}_0}{\omega} - \frac{\beta}{\omega}\left(\mu_0 - \frac{\varphi_0}{\gamma}\right)\right]Sin(\omega \cdot t)\right] + \right. \tag{4.14}$$

$$\left. + \omega\left\{\left[\frac{\dot{\mu}_0}{\omega} - \frac{\beta}{\omega}\left(\mu_0 - \frac{\varphi_0}{\gamma}\right)\right]Cos(\omega \cdot t) - \left(\mu_0 - \frac{\varphi_0}{\gamma}\right)Sin(\omega \cdot t)\right\}\right\}, \;\; \frac{1}{c}$$

Выражения (4.14) можно представить в ином (более удобном) виде. Для этого обозначим в (4.11) $C_1 = A \cdot Sin\theta$, $C_2 = A \cdot Cos\theta$, тогда движения (4.11) могут быть записаны в виде

$$\mu(t) = A \cdot e^{\beta \cdot t}\left[Sin(\theta) \cdot Cos(\omega \cdot t) + Cos(\theta) \cdot Sin(\omega \cdot t)\right] + \frac{\varphi_0}{\gamma};$$

$$\dot{\mu}(t) = A \cdot e^{\beta \cdot t}\{\beta \cdot \left[Sin(\theta) \cdot Cos(\omega \cdot t) + Cos(\theta) \cdot Sin(\omega \cdot t)\right] + \tag{4.15}$$

$$+ \omega \cdot \left[Cos(\theta) \cdot Cos(\omega \cdot t) - Sin(\theta) \cdot Sin(\omega \cdot t)\right]\}, \;\; \frac{1}{c},$$

где

$$A = +\sqrt{C_1^2 + C_2^2} = +\sqrt{\left(\mu_0 - \frac{\varphi_0}{\gamma}\right)^2 + \left[\frac{\dot{\mu}_0}{\omega} - \frac{\beta}{\omega}\left(\mu_0 - \frac{\varphi_0}{\gamma}\right)\right]^2}, \tag{4.15-a}$$

$$\theta = arc\,tg\,\frac{C_1}{C_2} = arc\,tg\,\frac{\omega \cdot \left(\mu_0 - \dfrac{\varphi_0}{\gamma}\right)}{\dot{\mu}(0) - \beta \cdot \left(\mu_0 - \dfrac{\varphi_0}{\gamma}\right)}. \qquad (4.15\text{-б})$$

Согласно формулам сложения и вычитания тригонометрических функций

$$Sin(\theta) \cdot Cos(\omega \cdot t) + Cos(\theta) \cdot Sin(\omega \cdot t) = Sin(\theta + \omega \cdot t),$$

$$Cos(\theta) \cdot Cos(\omega \cdot t) - Sin(\theta) \cdot Sin(\omega \cdot t) = Cos(\theta + \omega \cdot t)$$

получим

$$\mu(t) = A \cdot e^{\beta \cdot t} Sin(\theta + \omega \cdot t) + \frac{\varphi_0}{\gamma};$$

$$\dot{\mu}(t) = A \cdot e^{\beta \cdot t} \left[\beta \cdot Sin(\theta + \omega \cdot t) + \omega \cdot Cos(\theta + \omega \cdot t)\right], \frac{1}{c}. \qquad (4.16)$$

Подставив в (4.16) значения A и θ из (4.15-а),(4.15-б) окончательно получим уравнения возмущенного движения

$$\mu(t) = \sqrt{\left(\mu_0 - \frac{\varphi_0}{\gamma}\right)^2 + \left[\frac{\dot{\mu}_0}{\omega} - \frac{\beta}{\omega}\left(\mu_0 - \frac{\varphi_0}{\gamma}\right)\right]^2} \cdot e^{\beta \cdot t} \cdot Sin\left[arc\,tg\,\frac{\omega \cdot \left(\mu_0 - \dfrac{\varphi_0}{\gamma}\right)}{\dot{\mu}_0 - \beta \cdot \left(\mu_0 - \dfrac{\varphi_0}{\gamma}\right)} + \omega \cdot t\right] + \frac{\varphi_0}{\gamma};$$

$$\dot{\mu}(t) = \sqrt{\left(\mu_0 - \frac{\varphi_0}{\gamma}\right)^2 + \left[\frac{\dot{\mu}_0}{\omega} - \frac{\beta}{\omega}\left(\mu_0 - \frac{\varphi_0}{\gamma}\right)\right]^2} \cdot e^{\beta \cdot t} \times \qquad (4.17)$$

$$\times \left\{\beta \cdot Sin\left[arc\,tg\,\frac{\omega \cdot \left(\mu_0 - \dfrac{\varphi_0}{\gamma}\right)}{\dot{\mu}_0 - \beta \cdot \left(\mu_0 - \dfrac{\varphi_0}{\gamma}\right)} + \omega \cdot t\right] + \omega \cdot Cos\left[arc\,tg\,\frac{\omega \cdot \left(\mu_0 - \dfrac{\varphi_0}{\gamma}\right)}{\dot{\mu}_0 - \beta \cdot \left(\mu_0 - \dfrac{\varphi_0}{\gamma}\right)} + \omega \cdot t\right]\right\}, \frac{1}{c}.$$

Часто основной интерес при исследовании представляют движения регулятора, получаемые при $\mu_{\text{г}}(0) = \mu_{\text{г}0} = 0$, $\dot{\mu}_{\text{г}}(0) = \dot{\mu}_{\text{г}0} = 0$ и $\varphi(t) = \varphi_0 = Const \neq 0$. Такие движения называются переходными процессами.

Переходные процессы в регуляторе

а) при $T_к^2 - 4\gamma T_г^2 > 0$ -

$$\mu(t) = \frac{\varphi_0}{\gamma}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}e^{\lambda_2 t} - \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}e^{\lambda_1 t} + 1\right);$$

$$\dot{\mu}(t) = \frac{\varphi_0}{\gamma} \cdot \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}\left(e^{\lambda_2 t} - e^{\lambda_1 t}\right), \frac{1}{c}; \tag{4.18}$$

б) при $T_к^2 - 4\gamma T_г^2 < 0$ -

$$\mu(t) = \frac{\varphi_0}{\gamma}\left\{e^{\beta \cdot t}\left[\frac{\beta}{\omega}Sin(\omega \cdot t) - Cos(\omega \cdot t)\right] + 1\right\};$$

$$\dot{\mu}(t) = \frac{\varphi_0}{\gamma}e^{\beta \cdot t}\left\{\beta\left[\frac{\beta}{\omega}Sin(\omega \cdot t) - Cos(\omega \cdot t)\right] + \omega\left[\frac{\beta}{\omega}Cos(\omega \cdot t) + Sin(\omega \cdot t)\right]\right\}, \frac{1}{c} \tag{4.19}$$

или

$$\mu(t) = \frac{\varphi_0}{\gamma}\left[\sqrt{\frac{\omega^2 + \beta^2}{\omega^2}} \cdot e^{\beta \cdot t} \cdot Sin\left(\omega \cdot t - arc\,tg\frac{\omega}{\beta}\right) + 1\right];$$

$$\dot{\mu}(t) = \frac{\varphi_0}{\gamma}\sqrt{\frac{\omega^2 + \beta^2}{\omega^2}} \cdot e^{\beta \cdot t} \times \left[\beta \cdot Sin\left(\omega \cdot t - arc\,tg\frac{\omega}{\beta}\right) + \omega \cdot Cos\left(\omega \cdot t - arc\,tg\frac{\omega}{\beta}\right)\right], \frac{1}{c}. \tag{4.20}$$